Université Claude Bernard Lyon 1

Math4 - MAT2013L

Examen

10 juin 2008 - Durée : 2H

L'utilisation de documents de toute nature et de calculettes n'est pas autorisée. En ce qui concerne la notation, il sera tenu compte de la qualité de la rédaction, de sa clarté quant à la citation des résultats du cours utilisés, ainsi que des résultats calculatoires obtenus. Texte: 3 pages, contenu: 4 exercices.

Exercice I

On considère la fraction rationnelle

$$R(X) = \frac{1}{(X+1)(X^2+1)}$$

Sachant qu'elle peut s'écrire sous la forme

$$R(X) = \frac{a}{(X+1)} + \frac{bX+c}{(X^2+1)}$$

calculer les coefficients a, b et c.

Exercice II

On note $\mathcal{L}$ la transformation de Laplace et z un complexe.

1. Si f est C^1 dans $\mathbb{R}_+^*$ et telle que $f(0^+)$ existe, donner la valeur de $\mathcal{L}(Df)(z)$ en fonction de $\mathcal{L}(f)(z)$
2. Calculer $\mathcal{L}(\mathcal{H}e^{-t})(z)$
3. Calculer $\mathcal{L}(\mathcal{H}\sin t)(z)$

Exercice III

On considère une application y définie sur $\mathbb{R}_+^*$ vérifiant pour $t > 0$ l'équation différentielle (E):

$$y'' + y = e^{-t}$$

1. Si y est une solution, montrer que y est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$
2. Résoudre l'équation différentielle avec les conditions initiales suivantes

$$y(0+) = \frac{1}{2}$$

$$y'(0+) = 0$$

Exercice IV

On note $\mathcal{H}$ la fonction d'Heaviside et δ_a la distribution de Dirac en $a \in \mathbb{R}$.

On rappelle qu'une distribution tempérée

$$T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}) = \mathcal{S}'$$

possède une transformée de Fourier $\mathcal{F}_\Omega(T)$ définie par son action

$$< \mathcal{F}_\Omega(T)_\nu, \psi(\nu) >=< T_t, \mathcal{F}_\Omega(\psi)(t) >=< T_t, \int_{\mathbb{R}} \psi(\nu) e^{-i\Omega\nu t} d\nu >$$

sur toute application test $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.

Dans cet exercice, Ω sera égal à 2π et on posera

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}_{2\pi}$$

On rappelle aussi qu'un produit de convolution de deux distributions tempérées et causales

T et U

$$T, U \in \mathcal{S}'_+(\mathbb{R}) = \mathcal{S}'_+$$

est défini par

$$< T * U, \psi >=< T_t, < U_u, \psi(u+t) >>$$

pour toute applications test $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$

On notera enfin

$$T * T = T^{*2}$$

le produit de convolution d'une distribution $T \in \mathcal{S}'_+$ par elle-même.

Dans les calculs, vous pourrez considérer une distribution régulière T_f comme une application f

en les identifiant.

1. En utilisant une application test $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$,

   (a) montrer que $\mathcal{H}^{*2} = \mathcal{H} * \mathcal{H}$ est une distribution régulière en donnant ses valeurs sur $\mathbb{R}$

   (b) τ_a ($a \in \mathbb{R}$) étant l'opérateur retard défini pour une application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ par

   $$(\tau_a(f))(t) = f(t-a)$$

   montrer

   $$\mathcal{H} * \delta_a = \tau_a(\mathcal{H})$$

   (c) montrer que, pour une application paire $f \in \mathcal{S}'$, on a

   $$\mathcal{F}(\mathcal{F}(f)) = f$$

2. On note $\sin_c$ le sinus cardinal qui est l'application définie pour $t \neq 0$, par

$$\sin_c(t) = \frac{\sin(t)}{t}$$

   Montrer que $\sin_c$ est de carré intégrable sur $\mathbb{R}$ (notation: $\sin_c \in L^2(\mathbb{R})$).

3. On note $\chi_{\frac{1}{2\pi}}$ la fonction caractéristique de l'intervalle $[-\frac{1}{2\pi}, \frac{1}{2\pi}]$ (qui est nulle en dehors de l'intervalle et égale à 1 sur cet intervalle). Montrer l'égalité

$$\mathcal{F}(\chi_{\frac{1}{2\pi}}) = \frac{1}{\pi}.\sin_c$$

   et en déduire l'égalité

$$\int_{\mathbb{R}_+} \sin_c = \frac{\pi}{2}$$

4. Montrer l'égalité

$$\mathcal{F}(\sin_c) = \pi.(\delta_{-\frac{1}{2\pi}} * \mathcal{H} - \delta_{\frac{1}{2\pi}} * \mathcal{H})$$

5. En admettant l'égalité

$$\mathcal{F}((\sin_c)^2) = \mathcal{F}(\sin_c)^{*2}$$

   donner l'expression de $\mathcal{F}((\sin_c)^2)$ et la représenter graphiquement en la considérant comme application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

6. Donner la valeur dans $\mathbb{R}$ de

$$\int_{\mathbb{R}_+} (\sin_c)^2$$

   ainsi que celle de

$$\lim_{n \to +\infty} \int_{-n}^{n} \sin_c$$