Université Claude Bernard Lyon 1

Math4 Méca, Phys, SPI

MAT2013L

Partiel

21 avril 2008 - Durée : 1H30

L'utilisation de documents de toute nature et de calculettes n'est pas autorisée. En ce qui concerne la notation, il sera tenu compte de la qualité de la rédaction, de sa clarté quant à la citation des résultats du cours utilisés, ainsi que des résultats calculatoires obtenus.

Texte: 2 pages, contenu: 3 exercices indépendants

Exercice I

Pour $x \in [0, +\infty[$ on pose

$$f(x) = \int_0^\infty \frac{e^{-xt^2}}{1+t^2} dt$$

1. Montrer que l'application f est bien définie sur $[0, +\infty[$.
2. (a) Montrer que l'application f est continue sur $[0, +\infty[$.
   (b) Montrer que l'application f est dérivable sur $]0, +\infty[$ et donner une expression de sa dérivée sous forme intégrale (on montrera d'abord que f est dérivable sur tout intervalle $]a, b[$ où a et b sont deux nombres réels tels que $0 < a < b$).
3. Montrer que, sur $]0, +\infty[$, f est solution de l'équation différentielle

$$y'(x) - y(x) = -\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{x}}$$

(On admettra l'égalité

$$\int_0^\infty e^{-xt^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{x}}$$

pour $x > 0$).

Exercice II

1. Soient a et b et t trois réels.
   En utilisant, pour deux réels u et v, la formule
   $$2\cos u \cos v = \cos(u+v) + \cos(u-v)$$
   calculer
   $$\int_a^b \cos(t-u)\cos(u)du$$
2. Soit l'application f définie sur $\mathbb{R}$ par
   $$f(t) = \begin{cases} \cos(t) & \text{si } t \in [0, 2\pi] \\ 0 & \text{si } t \notin [0, 2\pi] \end{cases}$$
   Donner les formules définissant $(f * f)(t)$ selon les valeurs de t.

Exercice III

Dans cet exercice, la transformée de Fourier $\mathcal{F}(f)$ d'une application f est définie par la formule

$$\mathcal{F}(f)(\nu) = \int_{\mathbb{R}} f(t)e^{-i2\pi\nu t}dt$$

1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une application admettant une transformée de Fourier.
   (a) Si f est paire, montrer que la transformée de Fourier inverse $\mathcal{F}^{-1}(f)$ est égale à $\mathcal{F}(f)$ et donner son expression sous forme d'intégrale calculée sur $\mathbb{R}_+$
   (b) Si f est paire et à valeurs réelles, montrer que $\mathcal{F}(f)$ est aussi à valeurs réelles.
2. Soit un réel $a > 0$. On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par
   $$g(t) = e^{-2\pi a|t|}$$
3. Montrer que g admet une transformée de Fourier et, en justifiant vos calculs, qu'elle vérifie l'égalité
   $$\mathcal{F}(g)(\nu) = \frac{a}{\pi(a^2+\nu^2)}$$
4. En déduire la valeur de
   $$\mathcal{F}(\frac{a}{\pi(a^2+t^2)})(\nu)$$
5. Soit b un nombre réel tel que $a < b$. On pose, pour $t \in \mathbb{R}$,
   $$\phi_a(t) = \frac{1}{\pi(a^2+t^2)}$$
   et
   $$\phi_b(t) = \frac{1}{\pi(b^2+t^2)}$$
   Trouver dans $L^1(\mathbb{R})$ une solution $h : t \mapsto h(t)$ qui soit solution de l'équation convolutionnelle
   $$h * \phi_a = \phi_b$$