UE : Math 4

Mémento sur les intégrales impropres

1. Soit f une fonction réelle et continue sur l'intervalle $[a, +\infty[$. Par définition et sous réserve d'existence,

$$\int_a^{+\infty} f(t)dt = \lim_{x\to+\infty} \int_a^x f(t)dt$$

Si cette limite existe l'intégrale **converge**, sinon elle **diverge**. **Convergence** ou **divergence** représentent la **nature** de l'intégrale.
Dans la plupart des cas, on ne calcule pas explicitement l'intégrale. On dispose d'outils pour conclure sur la nature de cette intégrale.
Remarque : Si $b > a$, les intégrales $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ et $\int_b^{+\infty} f(t)dt$ sont de même nature, si bien que pour conclure sur $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ on étudiera souvent $\int_b^{+\infty} f(t)dt$ pour un b bien choisi.

2. **Intégrales de Riemann, intégrales «prototypes»**
Soit a et α deux nombres réels tels que $a > 0$, alors l'intégrale impropre :

$$\int_a^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha}$$

- converge si $\alpha > 1$;
- diverge si $\alpha \leq 1$.

3. **Comparaison des intégrales**
Soit f et g sont deux fonctions, définies et continues sur $[a, +\infty[$, telles que $0 \leq f(t) \leq g(t)$ pour tout $t \geq a$. Pour tout $x \geq a$, on a :

$$0 \leq \int_a^x f(t)dt \leq \int_a^x g(t)dt.$$

De plus, comme $f(t) \geq 0$ pour $t \geq a$, la fonction $x \mapsto \int_a^x f$ est croissante sur $[a, +\infty[$ donc, quand x tend vers $+\infty$, ou bien elle converge, ou bien elle diverge vers $+\infty$. De même pour g, d'où :

Lemme (1) :
- Si $\int_a^{+\infty} g(t)dt$ converge alors $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ converge ;
- Si $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ diverge alors $\int_a^{+\infty} g(t)dt$ diverge.

4. **Convergence absolue**
Soit f une fonction définie et continue sur $[a, +\infty[$. On dit que l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ **converge absolument** si l'intégrale $\int_a^{+\infty} |f(t)|dt$ converge.

Lemme (2) : **Une intégrale absolument convergente est convergente.**
Attention, la réciproque est fausse !

5. **Utilisation des équivalents**
Si f est une fonction à valeurs **positives** sur $[a, +\infty[$ et si f et g sont équivalentes au voisinage de l'infini :

$$f(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} g(t),$$

alors $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ et $\int_a^{+\infty} g(t)dt$ sont de même nature.

6. Si f une fonction réelle et continue sur l'intervalle $]-\infty, a]$, par définition et sous réserve d'existence,

$$\int_{-\infty}^{a} f(t)dt = \lim_{x \to -\infty} \int_{x}^{a} f(t)dt$$

7. Intégrales $\int_a^b f(t)dt$ où f est une fonction définie continue sur l'intervalle **semi-ouvert** $]a, b]$.

1. Si la fonction f admet une limite en a alors, en prolongeant f par continuité en a, l'intégrale $\int_a^b f(t)dt$ se ramène à l'intégrale d'une fonction définie continue sur l'intervalle fermé $[a, b]$.
2. Si la fonction f n'admet pas de limite en a alors, par définition et sous réserve d'existence,

$$\int_{a}^{b} f(t)dt = \lim_{x \to a^+} \int_{x}^{b} f(t)dt.$$

   On utilise alors des méthodes analogues à celles passées en revue ci-dessus.
3. Donnez une condition nécessaire et suffisante sur α pour qu'il y ait convergence de l'intégrale :

$$\int_{0}^{a} \frac{dt}{t^\alpha},$$

   où a est un nombre réel positif.
   (*faites un changement de variable*!)

8. **Intégrales impropres de fonctions à valeurs complexes**
Si f est continue sur l'intervalle $[a, +\infty[$ et à valeurs dans $\mathbb{C}$, on peut définir comme précédemment, sous réserve d'existence :

$$\int_{a}^{\infty} f(t)\ dt = \lim_{x \to \infty} \int_{a}^{x} f(t)\ dt.$$

Ceci équivaut à dire que les intégrales suivantes (à valeurs réelles) convergent :

$$\int_{a}^{\infty} \mathrm{Re}(f(t))\ dt \text{ et } \int_{a}^{\infty} \mathrm{Im}(f(t))\ dt.$$

De plus, en cas de convergence,

$$\int_{a}^{\infty} f(t)\ dt = \int_{a}^{\infty} \mathrm{Re}(f(t))\ dt + i \int_{a}^{\infty} \mathrm{Im}(f(t))\ dt.$$

On dispose également de la notion de **convergence absolue** (en utilisant le module au lieu de la valeur absolue, ce qui s'écrit de la même manière), et le lemme (2) reste vrai :

Lemme (2') : Si l'intégrale (à valeurs réelles positives) $\int_a^\infty |f(t)|\ dt$ converge, alors l'intégrale (à valeurs complexes) $\int_a^\infty f(t)\ dt$ converge.

Enfin, tout ceci vaut également pour l'intégration sur les autres types d'intervalle ($]-\infty, a]$, $]a, b]$,...)