Examen de Probabilités

L3, 9 juin 2008

Durée 3h

La qualité de la présentation et de la rédaction seront notés sur **2 points**.

Exercice 1 : Connaissance du cours

Les réponses aux questions de cet exercice doivent être brèves (2-3 lignes maximum). Cet exercice est noté de la manière suivante : toute réponse correcte vaut **+ 0,5 point**, toute réponse incorrecte vaut **- 0,5 point**.

1) Soient X, Y deux variables aléatoires discrètes à valeurs dans $\{1, \dots, k\}$ et $\{1, \dots, l\}$, respectivement. Que doit-on calculer pour connaître la loi conditionnelle de X sachant Y ?

2) Soient X, Y, Z des variables aléatoires dans $\mathbf{R}$, dont la loi de triplet (X, Y, Z) est la mesure de probabilités $\mu_{(X,Y,Z)}$ sur $\mathbf{R}^3$.

a) Par quelle formule calcule-t-on

$$P\big((a \leq X \leq Y \leq b) \cap (c \leq Z \leq d)\big)\,?$$

b) Par quelle formule calcule-t-on

$$P\,(a \leq X \leq b)\,?$$

3) Si X est une variable aléatoire indépendante de Y et si Y est indépendante de Z, est-ce que X est indépendante de Z ? (si oui, brève explication, si non, contre-exemple).

4) Quelle est l'espérance et la variance d'une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$?

5) Soit μ une mesure de probabilités sur $\mathbf{R}^2$. Si je connais les fonctions

$$f(t) = \int\!\!\int_{\mathbf{R}^2} e^{-itx}\, d\mu(x, y)$$

et

$$g(t) = \int\!\!\int_{\mathbf{R}^2} e^{-ity}\, d\mu(x, y),$$

est-ce que je connais la mesure μ ?

6) Quelle est la fonction caractéristique d'une loi normale $\mathcal{N}(m, \sigma)$?

7) Si $X_1, \dots, X_n$ sont des variables aléatoires indépendantes de même loi $\mathcal{N}(m, \sigma)$:

a) Quelle est la loi de

$$\frac{X_1 + \ldots + X_n}{n}\;?$$

b) Quelle est la loi de
$$\frac{X_1 + \ldots + X_n - nm}{\sqrt{n}} \ ?$$

8) On fait 10000 répétitions indépendantes d'une loi de Bernoulli de paramètre 3/4 et on compte le nombre total de succès. Par quelle loi normale peut-on approcher la loi du nombre total de succès ?

Exercice 2

Soient X_1 et X_2 des variables aléatoires, indépendantes, de loi de Poisson de paramètre λ_1 et λ_2 respectivement.

1) Calculez la loi de $X_1 + X_2$.

2) Calculez la loi conditionnelle de X_1 sachant $X_1 + X_2$. Identifiez une loi connue. Interprétez le résultat (sans détails).

Exercice 3

Soient $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes de loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.

1) Calculez la loi de $\max_{i=1,\ldots,n} X_i$.

2) Calculez la loi de $\min_{i=1,\ldots,n} X_i$.

Exercice 4

Soient $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes de loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$. On pose
$$\overline{X}_n = \frac{X_1 + \ldots + X_n}{n}$$
et
$$Z_n = \frac{1}{\overline{X}_n} \, .$$

1) Montrez que Z_n converge presque sûrement vers λ quand n tend vers $+\infty$.

2) En supposant n suffisamment grand pour que cela se justifie, par quelle loi gaussienne peut-on approcher la loi de $\overline{X}_n$?

3) Soit N une variable aléatoire de loi $\mathcal{N}(0,1)$, montrez qu'il existe un unique $\phi \in \mathbf{R}^+$ tel que $P(|N| \leq \phi) = 0,95$.

4) En déduire un intervalle de la forme $I = [1/\lambda - \beta \, , \, 1/\lambda + \beta]$, avec β à déterminer, tel que $P(\overline{X}_n \in I) = 0,95$.

5) En déduire un intervalle de la forme $J = [\alpha_1 \lambda \, , \, \alpha_2 \lambda]$, avec α_1, α_2 à déterminer, tel que $P(Z_n \in J) = 0,95$.

6) Application numérique : calculez J, en fonction de λ inconnu, pour $n = 10000$ (on vous donne la valeur $\phi = 1,96$).