Partiel de 2007

Exercice 1

1. vu en TD
2. vu en TD
3. $f(t) = t - (f * (H(u)u))(t)$ (attention au signe). On trouve $\mathcal{L}(f)(z) = \frac{1}{1+z^2}$ donc $f(t) = H(t)\sin t$.

Exercice 2

1. $a = -1/2$, $b = -1/4$, $c = 1/4$
2. cours
3. TD
4. On trouve $\mathcal{L}(y)(z)$ égal à la fonction de la question 1, d'où bien sûr $y(t) = \frac{1}{4}e^t - \frac{1}{4}e^{-t} - \frac{1}{2}te^{-t}$.

Exercice 3

1. cf cours : f intégrable sur $\mathbb{R}$
2. (a) cf. TD (b) par le cours $\mathcal{F}^{-1}(f)(\nu) = \frac{2\pi}{2\pi}\mathcal{F}_{-2\pi}(f)(\nu) = \mathcal{F}_{-2\pi}(f)(\nu)$ (Ou : on a $\mathcal{F}(\mathcal{F}(f))(t) = f(-t) = f(t)$ par parité de f, donc appliquer $\mathcal{F}(= \mathcal{F}_{2\pi})$ puis à nouveau $\mathcal{F}$ fait revenir au point de départ f, ce qui signifie que $\mathcal{F}$ est l'opération inverse de $\mathcal{F}$: $\mathcal{F}^{-1}(f) = \mathcal{F}(f)$). D'où, par (a), $\mathcal{F}^{-1}(f)(\nu) = 2\int_0^\infty f(t)\cos(2\pi\nu t)dt$.
3. cf. TD (ex.6 fiche 3, on a $g(t) = g_1(t)$)
4. même ref (avec $\Omega = 2\pi$) : $\mathcal{F}(g)(\nu) = \frac{2}{1+(2\pi)^2\nu^2}$
5. (a) majorer la valeur absolue par $\frac{1}{1+x^2}$ et faire comme vu plusieurs fois en TD. (b) Voir fiche 3 ex.6, mais on n'a plus la liberté sur le choix Ω ; on peut faire comme suit. Comme $\mathcal{F}(g)$ est intégrable on peut appliquer la formule d'inversion à g, $\mathcal{F}_{2\pi}\mathcal{F}_{2\pi}(g)(t) = g(-t) = g(t)$ (car g est paire). Comme $\mathcal{F}_{2\pi}(g)(\nu) = \frac{2}{1+(2\pi\nu)^2}$ est paire, la formule s'écrit
$$2\int_0^\infty \frac{2}{1+(2\pi\nu)^2}\cos(2\pi\nu t)d\nu = g(t).$$
Pour retomber sur I, il faut faire un changement de variable, $x = 2\pi\nu$, d'où
$$2\int_0^\infty \frac{2}{1+x^2}\cos(xt)\frac{dx}{2\pi} = g(t),$$
et prendre $t = 1$. On a finalement $I = \pi g(1) = \frac{\pi}{2e}$.

Partiel de 2008

Exercice 1

1. $\frac{e^{-xt^2}}{1+t^2} = \frac{1}{1+t^2}$ et $\frac{1}{1+t^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ (continue en 0, et équivalent à $\frac{1}{t^2}$ en l'infini), donc l'intégrale converge et f est bien définie.
2. (a) la majoration ci-dessus permet d'appliquer le théorème de continuité sous l'intégrale. (b) La dérivée par rapport au paramètre x de la fonction sous l'intégrale est $\frac{-t^2e^{-xt^2}}{1+t^2}$. Soit $a > 0$. Si $x > a$,
$$\left|\frac{-t^2e^{-xt^2}}{1+t^2}\right| \leq \frac{t^2e^{-at^2}}{1+t^2} \leq t^2e^{-at^2} = \varphi(t)$$

et la fonction $\varphi(t)$ est intégrable sur $[0,+\infty[$ (continue en 0, et $t^2\varphi(t) \to_{t\to\infty} 0$ donc $\varphi(t) \leq \frac{1}{t^2}$ pour t assez grand), donc on peut appliquer le thérème de dérivation sous l'intégrale pour $x \in [a,+\infty[$. Alors f est dérivable sur $[a,+\infty[$, et ceci vaut pour tout a, d'où la conclusion (remarque : le b de l'indication ne sert pas). Et $f'(x) = \int_0^\infty \frac{-t^2 e^{-xt^2}}{1+t^2} dt$.

3. Calculer $f'(x) - f(x)$ avec la formule précédente, il y une simplification,...

Exercice 2

Exercice 3

1. (a) voir partiel précédent (b) cela se voit sur la formule intégrale $\mathcal{F}(f)(\nu) = 2\int_0^\infty f(t)\cos(2\pi\nu t)dt$: tout est réel.
2.
3. g est intégrable sur $\mathbb{R}$ (elle est paire donc il suffit de le voir sur $[0,+\infty[$, et là c'est juste une exponentielle décroissante), et on calcule $\mathcal{F}(g)$ en découpant entre $\mathbb{R}_-$ et $\mathbb{R}_+$ (c'est presque la même fonction $g = g_{2\pi a}$ que dans l'ex.6 fiche 3).
4. $\mathcal{F}(g)(\nu) = \frac{a}{\pi(a^2+\nu^2)}$ donc $g(\nu) = \mathcal{F}^{-1}(\frac{a}{\pi(a^2+t^2)})(\nu)$ (en appliquant $\mathcal{F}^{-1}$ à chaque membre), et $\mathcal{F}^{-1} = \mathcal{F}$ par la question 1 car la fonction est paire (attention, ceci n'est vrai que parce que $\Omega = 2\pi$). Ainsi, $\mathcal{F}^{-1}(\frac{a}{\pi(a^2+t^2)})(\nu) = g(\nu) = e^{-2\pi|a|\nu}$.
5. On applique $\mathcal{F}$ à $h * \phi_a = \phi_b$:

$$\mathcal{F}(h)(\nu)\mathcal{F}(\phi_a)(\nu) = \mathcal{F}(\phi_b)(\nu)$$

d'où par ce qui précède

$$\mathcal{F}(h)(\nu)e^{-2\pi a|\nu|} = e^{-2\pi b|\nu|},$$

et $\mathcal{F}(h)(\nu) = e^{-2\pi(b-a)|\nu|} = \mathcal{F}(\phi_{b-a})(\nu)$, d'où $h = \phi_{b-a}$.