FEUILLE DE TD 3

Lois continues usuelles

Exercice 1 Calculer l'espérance et variance de X lorsque X est une variable aléatoire
1. de loi uniforme $\mathcal{U}([a,b])$ sur l'intervalle $[a,b] \subset \mathbb{R}$;
2. de loi normale $\mathcal{N}(m,\sigma)$ de paramètres $m \in \mathbb{R}, \sigma > 0$;
3. de loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$ de paramètre $\lambda > 0$.

Exercice 2 Soit X une variable aléatoire de loi de Cauchy de paramètre $a > 0$, $\mu_X(dx) = \frac{a}{\pi(a^2+x^2)}dx$.
1. Pour quels $\alpha \in \mathbb{R}$ la variable $|X|^\alpha$ est-elle intégrable ?
2. Déterminer la fonction caractéristique de cette loi, c.-à.-d. l'espérance de la variable aléatoire e^{itX} pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Exercice 3 Une variable aléatoire positive X est sans mémoire si

$$\mathbb{P}(X > t+s | X > t) = \mathbb{P}(X > s), \quad \forall t, s \geq 0.$$

Montrer qu'une variable aléatoire positive dont la loi admet une densité est sans mémoire si, et seulement si elle suit une loi exponentielle.

Exercice 4 Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^+$ de densité f, et un réel $r > 0$. Montrer que

$$\mathbb{E}(X^r) = \int_0^\infty r x^{r-1} \mathbb{P}(X > x) dx$$

(où les deux membres sont finis ou infinis).

Obtenir une loi à partir d'une autre

Exercice 5 Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $E \subset \mathbb{R}$ et $f : E \to \mathbb{R}$ une fonction mesurable. On définit $Y = f(X)$. Y est une variable aléatoire (pourquoi ?).
1. On suppose que X admet une densité et que f est injective et C^1 par morceaux. À l'aide d'un changement de variable, montrer que la loi de Y admet une densité que l'on explicitera.
2. On suppose que la loi de X est uniforme sur $[0,1]$ et que $f(x) = -\ln x$. Quelle est la loi de Y ?
3. On suppose que la loi de X est normale de paramètres $m \in \mathbb{R}$ et $\sigma > 0$. Trouver une fonction f telle que $Y = f(X)$ est une variable aléatoire de loi normale de paramètres $m = 0$ et $\sigma = 1$.

Exercice 6 Soit deux variables aléatoires X, Y indépendantes, de loi normale $\mathcal{N}(0,1)$.
1. Calculer la loi de la variable $\frac{X}{Y}$.
2. En déduire la loi de Z^{-1} si Z est une variable aléatoire de loi de Cauchy.

L'inégalité de Jensen

Exercice 7 Soit $f : E \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction convexe définie sur un intervalle E qui contient les valeurs d'une variable aléatoire intégrable X. Alors $\mathbb{E}[(f(X))_-] < \infty$ donc $\mathbb{E}[f(X)]$ a un sens (éventuellement $+\infty$), et :

$$f(\mathbb{E}[X]) \leq \mathbb{E}[f(X)].$$

De plus, si f est strictement convexe, alors $f(\mathbb{E}[X]) = \mathbb{E}[f(X)]$ implique que X est constante (sur un événement de mesure 1).

Entropie

Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ un espace de probabilité fini. L'*entropie* (dans la base b) de la probabilité $\mathbb{P}$ est la valeur

$$H_b(\mathbb{P}) := -\sum_{\omega\in\Omega} \mathbb{P}(\{\omega\}) \log_b(\mathbb{P}(\{\omega\}))$$

où $b > 0$ est la base du logarithme (on définit $0 \log_b(0) = 0$). En théorie de l'information on utilise surtout $b = 2$, c'est l'*entropie binaire*, qu'on va noter H. Autrement dit, H est l'espérance de la variable aléatoire $Z(\omega) = -\log_2(\mathbb{P}(\{\omega\}))$. On note aussi $H(X)$ l'entropie (binaire) de la loi d'une variable aléatoire finie X.

Exercice 8 On considère un jeu de 32 cartes avec la variable aléatoire X où

$$X(\text{carte}) = \begin{cases} a & \text{si la carte est noire} \\ b & \text{si la carte est un coeur} \\ c & \text{si la carte est le 7, le 8, le 9 ou le 10 de carreau} \\ d & \text{pour les autres cartes} \end{cases}$$

où a, b, c, d sont quatre nombres différents.
1. Calculer $H(X)$.
2. Alice et Bob jouent à un jeu : Alice tire une carte C et demande à Bob de déterminer la valeur de $X(C)$ en ne posant que des questions dont la réponse est oui ou non (donc du type «$X(C)$ appartient-il à A ?» où A est une partie de $\{a, b, c, d\}$).
Supposons que Bob choisit les questions «$X(C) = a$?», «$X(C) = b$?», «$X(C) = c$?», dans cet ordre. Déterminer la valeur moyenne du nombre de questions que Bob a besoin de poser.
(*La réponse est $H(X)$. On peut montrer que c'est une strategie optimale pour Bob, dans le sens où la valeur moyenne du nombre de questions est minimale.*)

Exercice 9 Soit maintenant $\mathbb{P}, \mathbb{P}'$ deux probabilités sur Ω. L'entropie relative $D(\mathbb{P}\|\mathbb{P}')$ est l'espérance de la variable $\omega \mapsto \log_2(\mathbb{P}(\{\omega\})) - \log_2(\mathbb{P}'(\{\omega\}))$ par rapport à $\mathbb{P}$, c.-à.-d.

$$D(\mathbb{P}\|\mathbb{P}') = \sum_{\omega\in\Omega} \mathbb{P}(\{\omega\}) \log_b \left(\frac{\mathbb{P}(\{\omega\})}{\mathbb{P}'(\{\omega\})} \right).$$

1. Montrer à l'aide de l'inégalité de Jensen que D est positive et que $D(\mathbb{P}\|\mathbb{P}') = 0$ implique $\mathbb{P} = \mathbb{P}'$.
2. On note u la distribution uniforme sur Ω. Montrer que

$$D(\mathbb{P}\|u) = H(u) - H(\mathbb{P}).$$

3. En déduire que l'entropie d'une probabilité sur Ω prend ses valeurs entre 0 et $\log_2 |\Omega|$ et que la probabilité uniforme est l'unique point maximal de H.