Feuille de TD 5

Exercice 1 Lois symétriques, fonction caractéristique
La loi d'une variable aléatoire réelle X est dite *symétrique* lorsque X et $-X$ ont même loi.
1. À quelle condition une loi de densité f par rapport à la mesure de Lebesgue est-elle symétrique ?
2. Soit X et Y des variables aléatoires indépendantes de même loi. Exprimer en fonction de la fonction caractéristique Φ_X de X les fonctions caractéristiques suivantes : Φ_{-X}, Φ_{X+Y}, Φ_{X-Y}.
3. Montrer que la loi d'une variable aléatoire réelle X est symétrique si, et seulement si, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\Phi_X(t) \in \mathbb{R}$.
4. Soit Y une v.a. réelle, et Z une v.a. indépendante de Y et de loi donnée par :

$$\mathbb{P}(Z = 1) = \frac{1}{2} = \mathbb{P}(Z = -1).$$

Montrer que la loi de $X = ZY$ est symétrique et calculer sa fonction caractéristique (en fonction de Φ_Y).

Exercice 2 Calculs de fonctions caractéristiques
1. Calculer Φ_X où X suit la loi $\mathrm{Exp}(\lambda)$. En déduire Φ_Z où Z suit la loi $\gamma_{n,\lambda}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.
2. On rappelle que, pour X suivant une loi de Cauchy de paramètre 1, $\Phi_X(t) = e^{-|t|}$. En déduire la loi de la moyenne de deux variables aléatoires de loi de Cauchy de paramètre 1 indépendantes.
3. Quelle est la loi d'une v.a. X telle que $\Phi_X(t) = \frac{1}{1+t^2}$?
4. Soit X_1, X_2, X_3, X_4 des variables aléatoires indépendantes de loi $\mathcal{N}(0, 1)$. On rappelle que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\Phi_{X_1}(t) = e^{-t^2/2}$. Calculer $\Phi_{X_1X_2}$ (en utilisant le théorème de Fubini), puis $\Phi_{X_1X_2+X_3X_4}$, et en déduire la loi de $X_1X_2 + X_3X_4$.

Exercice 3 Manipulation de l'espérance conditionnelle
Soit X et Y des variables aléatoires réelles.
1. Montrer que si φ est mesurable et telle que $X\varphi(Y)$ est intégrable, $\mathbb{E}[\varphi(Y)X|Y] = \varphi(Y)\mathbb{E}[X|Y]$ p.s..
2. Montrer que X et Y sont indépendantes si, et seulement si, pour tout fonction mesurable bornée h, on a : presque-sûrement, $\mathbb{E}[h(X)|Y] = \mathbb{E}[h(X)]$.
3. Montrer que, si $\varphi : I \to \mathbb{R}$ est mesurable et injective, $\mathbb{E}[X|\varphi(Y)] = \mathbb{E}[X|Y]$ p.s..
4. Si X et Y sont indépendantes, et φ est une fonction mesurable bornée $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, quelle est la loi conditionnelle de $\varphi(X, Y)$ sachant Y ? En déduire une expression de $\mathbb{E}[\varphi(X, Y)|Y]$.

Exercice 4 Calcul dans le cas à densité
Soit X, Y des variables aléatoires indépendantes de loi $\mathcal{N}(0, 1)$.
1. Déterminer la loi du couple $(X, Z) = (X, X^2 + Y^2)$.
2. En déduire la loi de $X^2 + Y^2$ puis la loi conditionnelle de X sachant $X^2 + Y^2$.
3. Calculer $\mathbb{E}[\,|X|\,|X^2 + Y^2]$.
4. Montrer que le couple (X, Y) a même loi que $(R\cos\Theta, R\sin\Theta)$ où Θ suit la loi uniforme sur $[0, 2\pi]$, R suit la loi de densité $re^{-r^2}\mathbf{1}_{[0,+\infty[}(r)$ par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$, et ces deux variables sont indépendantes. Retrouver alors rapidement le résultat de la question précédente.

Exercice 5 Soit $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes, de même loi, intégrables. On note

$$S = X_1 + \cdots + X_n.$$

1. Calculer l'espérance conditionnelle de X_1 sachant S.
2. Calculer l'espérance conditionnelle de S sachant X_1.

Exercice 6 Interprétation de $\mathbb{E}[X|Y]$ dans le cas L^2
Soit X, Y des variables aléatoires réelles. On suppose X de carré intégrable.
1. Montrer que $\mathbb{E}[X|Y]$ est aussi de carré intégrable (appliquer l'inégalité de Jensen).
2. On note $Z = X - \mathbb{E}[X|Y]$. Montrer que, pour toute fonction mesurable $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $g(Y)$ est de carré intégrable, on a : $\mathbb{E}[Zg(Y)] = 0$.
3. Montrer que l'erreur quadratique $\mathbb{E}[(X - g(Y))^2]$ entre X et $g(Y)$, où g est une fonction mesurable telle que $\mathbb{E}[g(Y)^2] < \infty$, atteint son minimum uniquement pour g tel que $g(Y) = \mathbb{E}[X|Y]$ p.s..
L'espérance conditionnelle $\mathbb{E}[X|Y]$ apparaît donc, dans $L^2(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})$, comme la projection de la variable aléatoire X sur le sous-espace formé des fonctions mesurables de Y de carré intégrable.