

FEUILLE DE TD 6

Modes de convergence et lemme de Borel-Cantelli

Exercice 1 Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une suite de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{R}$ et A un borélien de $\mathbb{R}$. On rappelle que pour une suite d'événements $(\Lambda_n)_{n\geq 0}$ dans Ω on pose $\limsup_n \Lambda_n = \bigcap_n \bigcup_{k\geq n} \Lambda_k$. Montrer que

$$\limsup_n \{X_n \in A\} = \{X_n \in A \text{ pour une infinité de } n\}.$$

Exercice 2 Soit $(x_n)_{n\geq 0}$ une suite de nombres réels. On rappelle que $\limsup_n x_n = \lim_n \sup_{k\geq n} x_k$. Montrer que

$$x_n \geq 0 \text{ pour une infinité de } n \quad \Longrightarrow \quad \limsup_n x_n \geq 0$$

et

$$\limsup_n x_n > 0 \quad \Longrightarrow \quad x_n > 0 \text{ pour une infinité de } n.$$

En revanche, les implications réciproques ne sont pas toujours vraies. Trouver des contre-exemples.

Exercice 3 Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$. On pose

$$Y = \limsup_n \frac{X_n}{\ln n}.$$

Le but est de montrer que $Y = \frac{1}{\lambda}$ presque sûrement.
1. Montrer que

$$\mathbb{P}\left(\limsup_n \left\{\frac{X_n}{\ln n} \geq \frac{1}{\lambda}\right\}\right) \leq \mathbb{P}\left(\limsup_n \frac{X_n}{\ln n} \geq \frac{1}{\lambda}\right).$$

2. Montrer que $\mathbb{P}\left(\limsup_n \left\{\frac{X_n}{\ln n} \geq \frac{1}{\lambda}\right\}\right) = 1$. En déduire que $\mathbb{P}(Y \geq \frac{1}{\lambda}) = 1$.
3. Montrer que, pour tout $\epsilon > 0$,

$$\mathbb{P}\left(\limsup_n \frac{X_n}{\ln n} > \frac{1+\epsilon}{\lambda}\right) \leq \mathbb{P}\left(\limsup_n \left\{\frac{X_n}{\ln n} > \frac{1+\epsilon}{\lambda}\right\}\right).$$

4. Montrer que $\mathbb{P}\left(\limsup_n \left\{\frac{X_n}{\ln n} > \frac{1+\epsilon}{\lambda}\right\}\right) = 0$. En déduire que $\mathbb{P}(Y > \frac{1+\epsilon}{\lambda}) = 0$.
5. En déduire que $\mathbb{P}(Y = \frac{1}{\lambda}) = 1$.
6. Montrer que $\frac{X_n}{\ln n}$ converge vers 0 en probabilité. Cette suite converge-t-elle presque sûrement vers 0 ?

Exercice 4 Soit $(p_n)_{n\geq 1}$ une suite dans $[0,1]$ qui tend vers 0. Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de loi Bernoulli de paramètre p_n : $\mathbb{P}(X_n = 1) = p_n = 1 - \mathbb{P}(X_n = 0)$.
1. Montrer que X_n converge vers 0 en probabilité.
2. Sous quelle condition sur la somme $\sum_n p_n$ la suite $(X_n)_{n\geq 1}$ converge-t-elle aussi presque sûrement vers 0 ?

Exercice 5 Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires, à valeurs dans $\{1,\ldots,k\}$, indépendantes et de même loi. On suppose que, pour $i = 1,\ldots,k$, $p_i = \mathbb{P}(X_n = i) > 0$. On définit $Q_n : \{1,\ldots,k\}^n \to [0,1]$ par :

$$Q_n(i_1,\ldots,i_n) = \mathbb{P}(X_1 = i_1,\ldots,X_n = i_n).$$

$Q_n(i_1,\ldots,i_n)$ est donc la probabilité d'observer les valeurs $i_1,\ldots,i_n$ pour $X_1,\ldots,X_n$.
On considère la variable aléatoire $Q_n(X_1,\ldots,X_n)$. Montrer que la suite $\left(-\frac{1}{n}\log_2 Q_n(X_1,\ldots,X_n)\right)_{n\geq 1}$ converge presque sûrement vers l'entropie (binaire) de $\mathbb{P}$.