

FEUILLE DE TD 8

Exercice 1
Montrer que, dans une suite de lancers indépendants de pièces de monnaie identiques, la séquence PFPFF (**P**ile, **F**ace) apparaît une infinité de fois. Préciser ce résultat à l'aide de la loi forte des grands nombres.

Exercice 2 *Loi forte des grands nombres pour des v.a.* L^4
Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, de même loi. On note $X = X_1$. On suppose $\mathbb{E}[X] = 0$ et $\mathbb{E}[X^4] < \infty$. Le but de l'exercice est de démontrer la loi forte des grands nombres pour la suite $(X_n)_n$. On note, pour tout n, $S_n = X_1 + \cdots + X_n$.
1. Montrer que, pour tout n, $\mathbb{E}[S_n^4] = n\mathbb{E}[X^4] + 3n(n-1)\mathbb{E}[X^2]^2$.
2. En déduire que, pour tout $\varepsilon > 0$, $\sum_n \mathbb{P}(|S_n| > n\varepsilon)$ converge.
3. Conclure.

Exercice 3
1. Montrer que si $(X_n)_n$ converge en loi vers X alors, pour toute fonction continue g, $(g(X_n))_n$ converge en loi vers $g(X)$.
2. Montrer que si $(X_n)_n$ converge en loi vers une variable aléatoire constante c, alors la convergence a lieu en probabilité.
3. Donner un exemple de suite $(X_n)_{n\geq 0}$ qui converge en loi mais pas en probabilité (et donc pas presque sûrement). *Indication : utiliser par exemple X de loi $\mathcal{N}(0,1)$ et $-X$, qui a même loi.*
4. Donner un exemple d'une suite de couples de variables aléatoires $(X_n, Y_n)_n$ telle que $(X_n)_n$ converge en loi vers X, $(Y_n)_n$ converge en loi vers Y et $X_n + Y_n$ ne converge pas en loi.
Montrer par contre que le couple (X_n, Y_n) converge en loi vers (X, Y) (et donc que $X_n + Y_n$ converge en loi vers $X + Y$ (pourquoi ?)) dans les deux cas suivants :
- lorsque, pour tout n, X_n et Y_n sont indépendantes (et X et Y sont considérées indépendantes) ;
- lorsque la variable aléatoire Y est constante presque sûrement.

Ce second cas est appelé *lemme de Slutzky*.

Exercice 4
1. Appliquer le théorème central limite à une suite $(X_n)_{n\geq 1}$ de variables aléatoires indépendantes de loi de Poisson de paramètre 1 pour trouver la limite de la suite de terme général :
$$e^{-n} \sum_{k=0}^{n} \frac{n^k}{k!}.$$
2. Soit f une fonction continue $[0,1] \to \mathbb{R}$. Déterminer la limite de la suite de terme général :
$$\int_0^1 \cdots \int_0^1 f\left(\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}\right) dx_1 \cdots dx_n.$$

Exercice 5 Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, de loi $\mathcal{E}(\lambda)$.
1. Montrer la convergence en probabilité suivante :
$$\frac{1}{\ln n} \max_{1\leq k\leq n} X_k \xrightarrow[n]{(p)} \frac{1}{\lambda}.$$
2. Démontrer que la suite de terme général $\max_{1\leq k\leq n} X_k - \frac{\ln n}{\lambda}$ converge en loi vers une limite à déterminer.

Exercice 6
1. Soit $(X_n)_{n\geq 1}$, une suite de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$. Montrer que $(X_n)_n$ converge en loi vers une variable aléatoire X si, et seulement si, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(X_n = k) \to_n \mathbb{P}(X = k)$.
2. Soit $(p_n)_{n\geq 1}$ une suite de réels > 0 telle que $np_n \to_n \lambda > 0$. Montrer qu'une suite de variables aléatoires S_n suivant la loi binomiale de paramètres n et p_n converge en loi vers une loi de Poisson de paramètre λ.