Exercices de probabilités

Memento

Fonctions associées aux lois

Pour une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{R}^d$,
- Fonction de répartition (si $d=1$) : $F_X(t)=\mathbb{P}(X\le t)$, $t\in\mathbb{R}$
- Fonction génératrice (si X est à valeurs dans $\mathbb{N}$) : $G_X(s)=\mathbb{E}[s^X]=\sum_{n=0}^{\infty}\mathbb{P}(X=n)s^n$, $s\in|-R,R|$
- Transformée de Laplace : $\mathcal{L}_X(\lambda)=\mathbb{E}[e^{-\langle\lambda,X\rangle}]\in]0,+\infty]$, $\lambda\in\mathbb{R}^d$
- Fonction caractéristique : $\Phi_X(t)=\mathbb{E}[e^{i\langle t,X\rangle}]\in\mathbb{C}$, $t\in\mathbb{R}^d$

Lois discrètes classiques

Nom	Paramètres	Support	Définition : $\mathbb{P}(A)=\sum_{a\in A}p(a)$
Loi de Dirac δ_a	$a\in\mathbb{R}$	$\{a\}$	$p(a)=1$
Loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$	$p\in[0,1]$	$\{0,1\}$	$p(0)=1-p$, $p(1)=p$
Loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$	$n\in\mathbb{N}$, $p\in[0,1]$	$\{0,\dots,n\}$	$p(k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$
Loi géométrique $\mathcal{G}(p)$	$p\in]0,1]$	$\mathbb{N}^*$	$p(k)=(1-p)^{k-1}p$
Loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$	$\lambda\in]0,+\infty[$	$\mathbb{N}$	$p(k)=e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$

Lois continues classiques

Nom	Paramètres	Support	Définition : $\mathbb{P}(A)=\int_A f(x)dx$
Loi uniforme $\mathcal{U}([a,b])$	$a<b$	$[a,b]$	$f(x)=\frac{1}{b-a}\mathbf{1}_{[a,b]}(x)$
Loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$	$\lambda\in]0,\infty[$	$]0,+\infty[$	$f(x)=\lambda e^{-\lambda x}\mathbf{1}_{]0,+\infty[}(x)$
Loi de Cauchy	$a\in]0,+\infty[$	$\mathbb{R}$	$f(x)=\frac{a}{\pi(a^2+x^2)}$
Loi normale/gaussienne $\mathcal{N}(m,\sigma^2)$	$m\in\mathbb{R}$, $\sigma^2\in]0,+\infty[$	$\mathbb{R}$	$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\exp\left(-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right)$

Exercice 1 – *Tirage de chaussettes.* Un tiroir contient n paires de chaussettes de couleurs différentes.
1. On tire 2 chaussettes au hasard. Quelle est la probabilité qu'elles viennent de la même paire ?
2. On tire 6 chaussettes au hasard. Calculer la probabilité des événements suivants :

$$E_1=\{\text{on a tiré 3 paires}\},\qquad E_2=\{\text{on a tiré au moins une paire}\},\qquad E_3=\{\text{on a tiré exactement une paire}\}.$$

Exercice 2 – *Modélisation.* Pour chacune des situations suivantes, donner un modèle et définir la variable ou l'événement cité :
1. On lance deux pièces de monnaie. On s'intéresse au fait que les pièces tombent sur des côtés différents.
2. On lance un dé à six faces, puis autant de pièces de monnaie qu'indique le résultat du dé. On note X le nombre de pièces lancées qui sont tombées sur Pile.
3. On lance une pièce jusqu'à ce qu'elle tombe sur pile. On note N le nombre de lancers réalisés.
4. Soit $1\le k\le n$ des entiers. Une urne contient n boules numérotées de 1 à n. On enlève k boules au hasard sans remise. On considère la somme S des numéros tirés.
5. On dispose de n tickets numérotés de 1 à n, que l'on place au hasard dans n enveloppes numérotées de 1 à n, à raison d'un ticket par enveloppe. On note N le nombre de tickets qui ont le même numéro que l'enveloppe où ils ont été placés.
6. Un bus passe à intervalle régulier, de durée T. On arrive à l'arrêt sans connaître les horaires. On s'intéresse au temps à attendre avant le prochain bus.
7. (Paradoxe de Bertrand) On choisit au hasard une corde d'un cercle. On s'intéresse au fait que sa longueur excède celle du triangle équilatéral inscrit dans le cercle.

Exercice 3 – *Espaces de probabilité.* En probabilités, on précise rarement l'espace $(\Omega,\mathcal{A},\mathbb{P})$ utilisé, car ce choix n'a pas d'importance tant que les variables aléatoires considérées ont la loi voulue. Cependant, il faut tout

de même savoir justifier l'*existence* d'un tel espace. De plus, ce choix est parfois important pour *coupler* des variables aléatoires.
1. Soit μ une probabilité sur $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$. Donner de la façon la plus simple possible un espace de probabilité et une variable aléatoire aléatoire X sur celui-ci tels que X suit la loi μ.
2. Soit μ une probabilité sur $(\mathbb{R}^m, \mathcal{B}(\mathbb{R}^m))$ et ν une probabilité sur $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$. Donner un espace de probabilité et des variables aléatoires X et Y sur celui-ci tels que X et Y sont indépendantes et de lois respectives μ et ν.
3. Soit $0 \leq p_X \leq p_Y \leq 1$. Donner un espace de probabilité et des variables aléatoires X et Y sur celui-ci tels que X et Y suivent les lois de Bernoulli de paramètre p_X et p_Y respectivement, et tels que $X \leq Y$.
4. Donner un espace de probabilité et une famille croissante $(X_p)_{p\in[0,1]}$ de variables aléatoires tels que, pour tout $p \in [0,1]$, X_p suit la loi $\mathcal{B}(p)$. *Indication : prendre* $\Omega = [0,1]$, *muni de la mesure de Lebesgue*

Exercice 4 – ***Fonction de répartition inverse.*** Soit X une variable aléatoire réelle. On rappelle que sa fonction de répartition $F_X : t \mapsto F_X(t) = \mathbb{P}(X \leq t)$ est croissante, continue à droite, et a pour limites 0 et 1 en $-\infty$ et $+\infty$.
On définit, pour tout $u \in]0,1[$ l'inverse généralisée continue à gauche de F_X :

$$F_X^{-1}(u) = \inf\{t \mid F_X(t) \geq u\} (\in \mathbb{R}).$$

1. Montrer que, pour tous $t \in \mathbb{R}, u \in]0,1[$, $(F_X^{-1}(u) \leq t) \Leftrightarrow (u \leq F_X(t))$.
2. En déduire que, si U suit la loi uniforme sur $[0,1]$, alors $\widetilde{X} = F_X^{-1}(U)$ suit la même loi que X. Expliciter F_X^{-1} dans les cas d'une loi exponentielle et d'une loi de Cauchy.
3. À l'aide de ce qui précède, montrer que toute fonction croissante F continue à droite telle que $\lim_{-\infty} F = 0$ et $\lim_{+\infty} F = 1$ est la fonction de répartition d'une loi de probabilité sur $\mathbb{R}$.

Exercice 5 – ***Lois images.***
1. Soit X une variables aléatoire de loi $\mathcal{E}(\lambda)$. Déterminer la loi de $\lfloor X \rfloor + 1$. *C'est une loi géométrique.*
2. Soit U une variable aléatoire de loi $\mathcal{U}([0,1])$. Déterminer la loi de U^2. *On calculera sa fonction de répartition.*
3. Soit U une variable aléatoire de loi $\mathcal{U}([-1,1])$. Déterminer la loi de $\arcsin(U)$.
4. Soit X de loi $\mathcal{N}(0,1)$. Déterminer la loi de $|X|$.

Exercice 6 – ***Calculs d'espérances.*** Indiquer si la variable aléatoire X admet une espérance, et la calculer alors, dans les cas suivants :
1. X suit la loi uniforme sur $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$ (où $n \in \mathbb{N}^*$)
2. X suit la loi géométrique de paramètre p (où $p \in (0,1]$)
3. X suit la loi sur $\mathbb{N}^*$ donnée par $\mathbb{P}(X = n) = \frac{1}{n(n+1)}$ pour tout $n \geq 1$. (Justifier que c'est une probabilité)
4. X suit la loi exponentielle de paramètre λ.
5. $X = e^Y$, où Y suit la loi exponentielle de paramètre λ (où $\lambda > 0$).
6. X suit la loi normale de paramètres 0 et 1.
7. X suit la loi de Cauchy de paramètre 1.

Exercice 7 – ***Lois images (le retour).***
1. Soit U une variable aléatoire de loi $\mathcal{U}([0,1])$. Déterminer la loi de U^2. *On calculera* $\mathbb{E}[g(U^2)]$ *pour toute fonction mesurable positive* $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$.
2. Soit X une variable aléatoire de loi $\mathcal{N}(0,1)$. Déterminer la loi de $|X|$.

Exercice 8 – ***Linéarité de l'espérance et théorème de Fubini.***
1. Soit N une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$. Montrer que

$$\mathbb{E}[N] = \sum_{n\geq 1} \mathbb{P}(N \geq n).$$

(Écrire $N = \sum_{k=1}^{N} 1 = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{1}_{\{k\leq N\}}$ et utiliser le théorème de convergence monotone)
2. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}_+$, et $\alpha > 0$. Montrer que

$$\mathbb{E}[X^\alpha] = \alpha \int_0^\infty t^{\alpha-1} \mathbb{P}(X > t) dt$$

(Écrire $X^\alpha = \int_0^X \alpha t^{\alpha-1} dt$ et utiliser le théorème de Fubini-Tonelli). Expliciter le cas particulier important $\alpha = 1$.
3. Soit $(A_n)_{n\geq 1}$ une suite d'événements. On note N le nombre (aléatoire) d'événéments parmi ceux-ci qui se produisent. Montrer que, si

$$\sum_n \mathbb{P}(A_n) < \infty,$$

alors presque-sûrement $N < \infty$. *C'est le lemme de Borel-Cantelli.*
(S'inspirer de la preuve de la question 1)

Exercice 9 – ***Calculs de variance.*** Indiquer si la variable aléatoire X admet une variance et la calculer alors, dans les cas suivants :
1. X suit la loi uniforme sur $\{1, 2, 3, \dots, n\}$ (où $n \in \mathbb{N}^*$).
2. X suit la loi uniforme sur $[a, b]$ (où $a < b$).

Exercice 10 – ***Formule de Bayes..*** Une maladie M affecte une personne sur 1000 dans une population donnée. On dispose d'un test sanguin qui détecte M avec une fiabilité de 99% lorsque cette maladie est effectivement présente. Cependant, on obtient aussi un résultat faussement positif pour 0,2% des personnes saines testées. Quelle est la probabilité qu'une personne soit réellement malade lorsque son test est positif ?

Exercice 11 – ***Loi conditionnelle.***
1. Soit $1 \leq n \leq N$ des entiers. Soit X une variable aléatoire, de loi uniforme dans $\{1, \dots, N\}$. Déterminer la loi conditionnelle de X sachant $\{X \in \{1, 2, \dots, n\}\}$.
2. Soit N un entier. Soit (X, Y) une variable aléatoire de loi uniforme dans l'ensemble des tirages de 2 nombres distincts dans $\{1, \dots, N\}$:

$$\Omega = \{(i, j) \in \{1, \dots, N\}^2 \,|\, i \neq j\}.$$

Pour $i \in \{1, \dots, N\}$, quelle est la loi conditionnelle de Y sachant $X = i$?
3. Soit $\lambda > 0$, et $t > 0$. Soit X une variable aléatoire de loi exponentielle de paramètre λ. Déterminer la loi conditionnelle de $Y = X - t$ sachant $\{X > t\}$.

Exercice 12 – ***Problèmes « concrets ».***
1. Quelles est la probabilité que, dans un groupe de 25 personnes, deux au moins aient leur anniversaire le même jour ? (On négligera les années bissextiles, on supposera les dates de naissances équiprobables et indépendantes) En donner une valeur approchée.
2. Sachant que chaque paquet de céréales contient une vignette à collectionner, que l'on ne découvre qu'à l'ouverture du paquet, combien en moyenne faut-il ouvrir de paquets pour posséder au moins un exemplaire de chacune des n vignettes ? En donner une expression approchée.

Exercice 13 – ***Quelques exemples de calculs sur les variables aléatoires indépendantes.***
1. On lance une pièce et un dé. On note $X(\in \{0, 1\})$ le résultat de la pièce, et $Y(\in \{1, \dots, 6\})$ celui du dé. Calculer la loi de $S = X + Y$ et son espérance.
2. Soit X, Y des variables aléatoires indépendantes, de loi $\mathcal{P}(\lambda)$ et $\mathcal{P}(\mu)$.
2.a) Déterminer la loi de $X + Y$.
2.b) Donner une expression pour $\mathbb{P}(X = Y)$ sous forme de série.
3. Soit X, Y des variables aléatoires indépendantes, de loi uniforme dans $[0, 1]$.
3.a) Calculer $\mathbb{P}(X < Y)$, $\mathbb{P}(\max(X, Y) < t)$ (pour $t \in \mathbb{R}$), $\mathbb{E}[X]$, $\mathbb{E}[\max(X, Y)]$, $\mathbb{E}[X\mathbf{1}_{\{X<Y\}}]$ et $\mathbb{E}[X\mathbf{1}_{\{X>Y\}}]$.
3.b) Quelle est la loi de $Z = \max(X, Y)$?
4. On choisit un point au hasard uniformément dans le disque de centre O et de rayon 1 dans $\mathbb{R}^2$. On note R sa distance au centre et $\Theta \in [0, 2\pi[$ son argument par rapport à un axe $[Ox)$ donné.
4.a) Calculer la probabilité $\mathbb{P}(R \leq r)$ pour tout réel r, puis en déduire la densité de R et son espérance.
4.b) Déterminer la loi des variables aléatoires $X = R^2$ et $Y = X^2$.
4.c) Calculer la probabilité $\mathbb{P}(\Theta \in [a, b])$ pour tous $0 < a < b < 2\pi$ et en déduire la loi de Θ.
4.d) Pour toute fonction mesurable positive g, montrer que

$$\mathbb{E}[g(R, \Theta)] = \int_0^{2\pi} \int_0^1 g(r, \theta) \frac{r}{\pi} dr\, d\theta,$$

en déduire que R et Θ sont indépendantes et retrouver leurs lois.
5. Soit $X_1, X_2, \dots$ une suite de variables aléatoires indépendantes, de loi uniforme dans $[0, 1]$. On note $S_0 = 0$ et, pour $n \geq 1$, $S_n = X_1 + \dots + X_n$.
5.a) Déterminer la loi de S_2.
5.b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $t \in [0, 1]$, montrer que

$$\mathbb{P}(S_n \leq t) = \int_0^t \mathbb{P}(S_{n-1} \leq t - u) du.$$

5.c) En déduire la valeur de $\mathbb{P}(S_n \leq t)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $t \in [0, 1]$.
5.d) On note $N = \max\{n \geq 1 \,|\, X_1 + \dots + X_n < 1\}$. Calculer $\mathbb{P}(N \geq n)$ et en déduire $\mathbb{E}[N]$.

Exercice 14 – ***Mélange de lois.*** Soit μ et ν deux mesures de probabilité sur $\mathbb{R}^d$, et $p \in [0, 1]$. On définit la mesure

$$\pi = p\mu + (1 - p)\nu.$$

C'est une mesure de probabilité ; donnons-en une interprétation probabiliste. Soient X, Y deux variables aléatoires, de lois μ et ν, et ξ une variable aléatoire de loi $\mathcal{B}(p)$. On suppose X, Y et ξ indépendantes. On définit

$$Z = X\xi + Y(1-\xi) = \begin{cases} X & \text{si } \xi = 1 \\ Y & \text{si } \xi = 0. \end{cases}.$$

1. Montrer que Z suit la loi π.
2. Si X a pour densité f_X et Y pour densité f_Y, quelle est la densité f_Z de Z ? Représenter l'allure de son graphe lorsque $\mu = \mathcal{N}(0,1)$, $\nu = \mathcal{N}(5,4)$ et $p = 1/2$.

Exercice 15 – ***Lois images (suite).***
1. Soit X, Y deux variables aléatoires indépendantes de loi $\mathcal{N}(0,1)$. Déterminer la loi de $\frac{X}{Y}$. En déduire la loi de $\frac{1}{Z}$ si Z suit une loi de Cauchy de paramètre 1.
2. Soit X, Y deux variables aléatoires indépendantes de loi $\mathcal{N}(0,1)$. On définit les variables aléatoires R, Θ par $(X, Y) = (R\cos\Theta, R\sin\Theta)$, $R > 0$ et $\Theta \in [0, 2\pi[$. Montrer que R et Θ sont indépendantes et déterminer leurs lois.

Exercice 16 – ***Simulation d'une loi conditionnelle.*** Soit X une variable aléatoire, à valeurs dans $(E, \mathcal{E})$. Soit $B \in \mathcal{E}$. Imaginons que l'on sache simuler la loi de X ; on voudrait simuler sa loi sachant $\{X \in B\}$.
Soit $X_1, X_2, \ldots$ une suite de variables aléatoires indépendantes, de même loi que X. On définit les v.a.

$$N = \inf\{n \geq 1 \,|\, X_n \in B\},$$

et $Z = X_N$.
1. Quelle est la loi de N ? En déduire $\mathbb{E}[N]$.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, calculer $\mathbb{P}(Z \in B, N = n)$. En déduire la loi de Z, et que N et Z sont indépendantes.
3. Supposons qu'une fonction `simule_X()` simule la loi de X. En déduire (en pseudo-code) une fonction qui simule la loi conditionnelle de X sachant $\{X \in B\}$.
4. Soit $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ une fonction de densité que l'on souhaite simuler. On suppose savoir simuler la loi de densité g sur $\mathbb{R}^d$ telle que $f \leq Cg$, pour une constante $C > 0$. Soit X une variable aléatoire de densité g et U une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0,1]$, indépendante de X. Montrer que la loi conditionnelle de X sachant $CUg(X) < f(X)$ est la loi de densité f. *On pourra calculer* $\mathbb{P}(X \in B, CUg(X) < f(X))$ *pour tout* $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$. En déduire une façon de simuler la loi de densité f.

Exercice 17 – ***Convergence d'un maximum normalisé.*** Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, de loi $\mathcal{E}(\lambda)$.
1. Montrer la convergence en probabilité suivante :

$$\frac{1}{\ln n} \max_{1\leq k\leq n} X_k \xrightarrow[n]{(p)} \frac{1}{\lambda}.$$

2. Démontrer que la suite de terme général

$$\max_{1\leq k\leq n} X_k - \frac{\ln n}{\lambda}$$

converge en loi vers une limite à déterminer.
3. Montrer que $(\frac{X_n}{\ln n})_n$ converge vers 0 en probabilité. Est-ce que cette convergence est presque sûre ?

Exercice 18 – ***Comparaison des modes de convergence.***
1. Donner un exemple de suite $(X_n)_{n\geq 0}$ qui converge en loi mais pas en probabilité. *Le construire par exemple à l'aide de* $X \sim \mathcal{B}(\frac{1}{2})$ *et de* $1 - X$*, qui a même loi.*
2. Donner un exemple de suite $(X_n)_{n\geq 0}$ qui converge en probabilité mais pas p.s. *Prendre* X_n *indépendantes, de loi* $\mathcal{B}(p_n)$ *où* p_n *tend vers 0 mais* $\sum_n p_n = \infty$*, et appliquer le lemme de Borel-Cantelli. Ou : Soit* U *de loi uniforme sur* $[0,1]$. *Prendre* X_n *égal à* 1 *ssi* $U \in [\frac{p}{2^k}, \frac{p+1}{2^k}[$ *où* $n = 2^k + p$ *et* $0 \leq p < 2^k$.
3. Pour $p > 0$, donner un exemple de suite $(X_n)_{n\geq 0}$ qui converge en probabilité mais pas dans L^p *Prendre* X_n *à valeurs dans* $\{0, n\}$ *et ajuster les probabilités respectives de* 0 *et* n.