

Examen final du 29 avril 2014

Durée : 3 heures

Document autorisé : une page A4 de notes manuscrites. Appareils électroniques interdits.

Toute réponse doit être soigneusement rédigée et justifiée.

Le sujet comporte 5 exercices.

On rappelle que la densité de la loi $\mathcal{N}(m,\sigma^2)$ est $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$.

Exercice 1. Soit X, Y deux variables aléatoires indépendantes, de loi $\mathcal{N}(0,1)$. On définit

$$U = X + Y \qquad \text{et} \qquad V = X - Y.$$

1. Calculer la densité de (U, V).
2. Les variables aléatoires U et V sont-elles indépendantes ? Quelles sont leurs lois ?

Exercice 2. Soit X une variable aléatoire ayant pour densité

$$f : x \mapsto f(x) = 2(e^{-x} - e^{-2x})\mathbb{1}_{[0,+\infty[}(x).$$

1. Justifier que f définit bien une densité.
2. Calculer la fonction de répartition F_X de X.
3. Calculer $E[X]$.
4. On définit $Y = 1 - e^{-X}$. Montrer que Y a pour densité $f_Y : y \mapsto 2y\mathbb{1}_{[0,1]}(y)$.
5. Calculer l'espérance et la variance de Y.
6. Calculer la fonction de répartition F_Y de Y.
7. Soit $Y_1, Y_2, \ldots$ des variables aléatoires indépendantes et de même loi que Y. On définit, pour tout $n \geq 1$,

$$S_n = Y_1 + \cdots + Y_n \qquad \text{et} \qquad M_n = \max(Y_1, \ldots, Y_n).$$

7.a) Que peut-on dire de la suite $\frac{S_n}{n}$?
7.b) Pour $0 < \delta < 1$, calculer $P\Big(M_n \leq 1 - \delta\Big)$, et donner la limite de cette probabilité quand $n \to \infty$. Que dire de $P(M_n \geq 1 + \delta)$? En déduire que la suite $(M_n)_n$ converge en probabilité et donner sa limite.

Exercice 3 – *Équilibrage de pièce.* On considère une suite $(X_n)_{n\geq 1}$ de tirages à pile ou face indépendants d'une même pièce biaisée (on note 1 pour pile et 0 pour face) : il existe $p \in]0,1[$ tel que, pour tout $n \geq 1$,

$$P(X_n = 1) = p \qquad \text{et} \qquad P(X_n = 0) = 1 - p.$$

On groupe les tirages 2 par 2 (X_1 avec X_2, X_3 avec X_4, etc.), et on considère le premier groupe où les deux tirages sont distincts :

$$N = \min\big\{n \geq 1 \,\big|\, (X_{2n-1}, X_{2n}) = (0,1) \text{ ou } (1,0)\big\}.$$

On notera $A_n = \{(X_{2n-1}, X_{2n}) = (0,1) \text{ ou } (1,0)\}$ l'événement où les tirages du n-ième groupe sont distincts.
1. Que vaut $P(A_n)$, pour tout $n \geq 1$? Les événements $A_1, A_2, \ldots$ sont-ils indépendants ? (Pourquoi ?)
2. Pour tout $n \geq 1$, exprimer l'événement $\{N = n\}$ en fonction des A_k. En déduire $P(N = n)$. Quelle est la loi de N ?
3. Calculer $P(\{N = n\} \cap \{X_{2N-1} = 1\})$ pour tout $n \geq 1$.
4. En déduire $P(X_{2N-1} = 1)$.
5. En déduire une méthode, à l'aide d'une pièce de monnaie biaisée, pour tirer un nombre au hasard dans l'ensemble $\{0,1\}$ de façon équiprobable. *NB. La méthode ne requiert pas de connaître p.*

Exercice 4. Soit X une variable aléatoire de loi uniforme sur $[-1,1]$ (donc de densité $f : x \mapsto \frac{1}{2}\mathbb{1}_{[-1,1]}(x)$).
1. Calculer la fonction caractéristique $t \mapsto \Phi_X(t) = E[e^{itX}]$ de X. Vérifier que $\Phi_X(t) \in \mathbb{R}$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.
2. Soit Y et Z deux variables aléatoires réelles, indépendantes et de même loi (non spécifiée). On pose $W = Y - Z$. Montrer que, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\Phi_W(t) = \Phi_Y(t)\overline{\Phi_Y(t)} = |\Phi_Y(t)|^2.$$

3. Existe-t-il des variables aléatoires réelles Y et Z, indépendantes et de même loi, telles que $Y - Z$ suit la loi uniforme sur $[-1,1]$? *Indication : penser au signe de* Φ

Exercice 5 – *Convergence de série aléatoire.* Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, à valeurs dans $[0,1]$. Le but de l'exercice est de montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} E[X_n] < \infty$;

(ii) presque sûrement, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} X_n < \infty$.

Pour tout $n \geq 1$, on notera $S_n = X_1 + \cdots + X_n$, et $S = \lim_{n\to\infty} S_n = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} X_n \in [0,\infty]$.

1. On suppose (i). En déduire $E\Big[\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} X_n\Big] < \infty$, puis (ii).
2. Dans la suite de cette question, on suppose (ii).
2.a) Justifier que $E[e^{-S}] > 0$.
2.b) Justifier que, pour tout $n \geq 1$, $E[e^{-S_n}] = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} E[e^{-X_k}]$. En déduire (justifier) une expression de $E[e^{-S}]$, puis conclure que

$$-\sum_{n=1}^{\infty} \ln\big(E[e^{-X_n}]\big) < \infty.$$

2.c) Montrer que, pour tout $x \in [0,1]$,

$$1 - x \leq e^{-x} \leq 1 - e^{-1}x.$$

Indication : partant de $e^{-x} = 1 - \int_0^x e^{-t}dt$, *encadrer l'intégrale.*
2.d) En déduire, pour tout $n \geq 1$, une majoration de $E[e^{-X_n}]$ en fonction de $E[X_n]$, puis

$$E[e^{-X_n}] \leq e^{-e^{-1}E[X_n]}$$

2.e) En déduire (i).