MACS1.

Problème.

Intégration : volume de la boule unité
A rendre le 16/02/2015 .

Soit

$$\mathcal{B}_n = \{(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n ; \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \leq 1\}.$$

L'objectif de l'exercice est de calculer le volume de la boule unité $\lambda_n(\mathcal{B}_n)$ noté dans la suite $\mathcal{V}_n$.

1) On rappelle que $\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} \mathrm{d}x = \sqrt{\pi}$. Démontrer que

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\sum_{i=1}^{n} x_i^2} \mathrm{d}x_1 ... \mathrm{d}x_n = \pi^{n/2}.$$

2) La notion de coordonnées polaires d'un point de $\mathbb{R}^2$, représentant le module et l'angle avec la première bissectrice se généralise à $\mathbb{R}^n$ pour $n \geq 3$. Les coordonnées polaires d'un point $x = (x_1, ..., x_n)$ sont des nombres $(r, \theta_1, ..., \theta_{n-2}, \theta_{n-1})$ définis par les relations

$$\begin{aligned}
x_1 &= r \cos\theta_1 \cos\theta_2 ... \cos\theta_{n-2} \cos\theta_{n-1} \\
x_2 &= r \cos\theta_1 \cos\theta_2 ... \cos\theta_{n-2} \sin\theta_{n-1} \\
x_3 &= r \cos\theta_1 \cos\theta_2 ... \sin\theta_{n-2} \\
&. \\
&. \\
x_{n-1} &= r \cos\theta_1 \sin\theta_2 \\
x_n &= r \sin\theta_1
\end{aligned}$$

avec $r \in \mathbb{R}^+, \theta_1, ..., \theta_{n-2} \in [-\pi/2, \pi/2]$ et $\theta_{n-1} \in [0, 2\pi]$. On note V l'ensemble des points $(r, \theta_1, ..., \theta_{n-1})$ vérifiant ces conditions. En particulier, on remarquera que $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = r^2$. L'application A qui à $(r, \theta_1, ..., \theta_{n-1})$ associe $(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ n'est pas bijective, mais en la restreignant à l'ensemble ouvert U_1 formé des $(r, \theta_1, ..., \theta_{n-1})$ vérifiant

$$r > 0, \theta_1 \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[, ..., ..., \theta_{n-2} \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[, \theta_{n-1} \in]0, 2\pi[$$

on obtient un C^1-difféomorphisme sur l'ensemble ouvert U_2, complémentaire de l'ensemble des $(x_1, ..., x_n)$ vérifiant $x_1 \geq 0, x_2 = 0$.

Justifier que $V \setminus U_1$ et $\mathbb{R}^n \setminus U_2$ sont négligeables. Enoncer le théorème du changement de variables sur U_1 et U_2 et justifier que l'on a

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x_1, ..., x_n) \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2 ... \mathrm{d}x_n = \int_V f(A(r, \theta_1, ..., \theta_{n-1})) |J_A|(r, \theta_1, ..., \theta_{n-1}) \mathrm{d}r \mathrm{d}\theta_1 \mathrm{d}\theta_2 ... \mathrm{d}\theta_{n-1}.$$

3) En admettant que

$$|J_A|(r,\theta_1,...,\theta_{n-1}) = r^{n-1}\cos^{n-2}(\theta_1)\cos^{n-3}(\theta_2)...\cos(\theta_{n-2})$$

- Montrer que

$$\int_{]-\pi/2,\pi/2[\times]-\pi/2,\pi/2[\times...\times]0,2\pi[} |J_A|(r,\theta_1,...,\theta_{n-1})\mathrm{d}\theta_1...\mathrm{d}\theta_{n-1} = r^{n-1}\mathcal{A}_{n-1}, \tag{1}$$

où

$$\mathcal{A}_{n-1} = 2\pi I_1 I_2 ... I_{n-2} \text{ et } I_i = \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos^i(\theta)\mathrm{d}\theta.$$

- Montrer que

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\sum_{i=1}^n x_i^2}\mathrm{d}x_1...\mathrm{d}x_n = \mathcal{A}_{n-1}\int_0^\infty e^{-r^2}r^{n-1}\mathrm{d}r.$$

4) Etablir que

$$\mathcal{A}_{n-1} = \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(\frac{n}{2})}$$

où Γ est la fonction Gamma : $\Gamma(x) = \int_{\mathbb{R}_+^\star} t^{x-1}e^{-t}\mathrm{d}t$ définie pour $x \in \mathbb{R}_+^\star$.

5) Montrer

$$\mathcal{V}_n = \int_{\mathbb{R}^n} 1_{\sum_{i=1}^n x_i^2 \leq 1}\,\mathrm{d}x_1...\mathrm{d}x_n = \int_0^1 r^{n-1}\mathcal{A}_{n-1}\mathrm{d}r.$$

En déduire que

$$\mathcal{V}_n = \frac{\pi^{n/2}}{\frac{n}{2}\Gamma(\frac{n}{2})}.$$

Au passage si $n = 5, \mathcal{V}_n \approx 5.26$ *et c'est son maximum, pour* $n = 10, \mathcal{V}_n \approx 2.55$.

6) Montrer que $\forall c > 0, \frac{\Gamma(n/2)}{c^{n/2}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$. En déduire la limite de $\mathcal{V}_n$ lorsque n tend vers $+\infty$.
Indication pour la première partie : établir $\frac{\Gamma(n/2)}{c^{n/2}} \geq \int_c^\infty \left(\frac{t}{c}\right)^{n/2-1}e^{-t}\mathrm{d}t$ *et utiliser un théorème du cours.*

7) Soit f une fonction positive de $\mathbb{R}^n$ s'écrivant sous la forme $f(x_1,...,x_n) = \phi(r)$ (autrement dit la fonction ne dépend que de la norme), à l'aide des résultats précédents, établir que

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x_1,...,x_n)\mathrm{d}x_1...\mathrm{d}x_n = \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(\frac{n}{2})}\int_{\mathbb{R}_+} r^{n-1}\phi(r)\mathrm{d}r.$$

A quelle condition sur α, la fonction $f(x_1,...,x_n) = ||x||^\alpha = \left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right)^{\alpha/2}$ est-elle intégrable sur $\mathcal{B}_n$? sur $(\mathcal{B}_n)^c$?

Probabilités : marche aléatoire symétrique
A rendre le 17/03/2015.

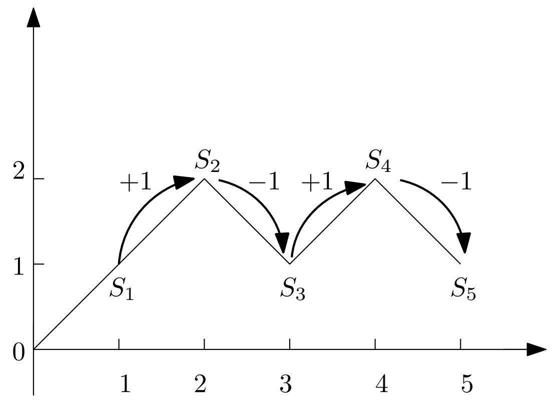
On se donne un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ sur lequel est définie une suite $(X_n, n \in \mathbb{N}^\star)$ de variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées. La loi de X_1 est donnée par

$$\mathbb{P}(X_1 = 1) = \mathbb{P}(X_1 = -1) = \frac{1}{2}.$$

On définit

$$S_0 = 0 \text{ et } S_n = \sum_{k=1}^n X_k.$$

La suite de variables aléatoires $(S_n, n \geq 1)$ est appelée *marche aléatoire symétrique*.



Plusieurs questions naturelles se posent, la marche aléatoire, retourne-t-elle à l'origine ? Si oui, combien de temps met-on en moyenne pour y revenir ?

L'objectif du problème est de répondre à ces deux questions. On définit

$$T = \begin{cases} \min\{n \geq 1; S_n = 0\} \text{ si } \{n \geq 1; S_n = 0\} \neq \emptyset \\ \\ +\infty \text{ sinon.} \end{cases}$$

La variable aléatoire T est le premier temps de retour à 0 de la marche aléatoire.

Etude du temps de retour à l'origine :

1) On considère les événement E_n=« la marche aléatoire n'a pas touché 0 entre les temps 1 et n » et A_k=« La marche aléatoire visite 0 pour la dernière fois avant l'instant n, à l'instant k ». Justifier brièvement les égalités

$$E_n = \{T > n\} \cup \{T = +\infty\}$$

$$A_k = \{S_k = 0\} \cap \left(\bigcap_{i=k+1}^{n} \{S_i \neq 0\} \right)$$

2) Montrer que

$$\mathbb{P}(A_k) = \mathbb{P}(S_k = 0)\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=k+1}^{n} \{S_i \neq 0\} \middle| S_k = 0 \right).$$

3) Soit k un entier fixé, on définit $S'_n = S_{n+k} - S_k$ pour tout $n \geq 0$. Justifier que $(S'_n, n \geq 0)$ est indépendante de S_k et a même loi que $(S_n)_{n\geq 0}$. En déduire que

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=k+1}^{n} \{S_i \neq 0\} \middle| S_k = 0 \right) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=k+1}^{n} \{S'_i \neq 0\} \middle| S_k = 0 \right) = \mathbb{P}\left(E_{n-k}\right).$$

4) Justifier que $\mathbb{P}(\bigcup_{k=0}^{n} A_k) = 1$ et montrer que

$$\sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(S_k = 0)\mathbb{P}\left(E_{n-k}\right) = 1.$$

5) Soit $x \in [0, 1[$. On considère les suites $(a_n, n \geq 0)$ et $(b_n, n \geq 0)$ définies par

$$a_n = \mathbb{P}(S_n = 0)x^n \text{ et } b_n = \mathbb{P}(E_n)x^n.$$

Justifier que les séries de terme général $(a_n, n \geq 0)$ et $(b_n, n \geq 0)$ sont convergentes. En utilisant un produit de Cauchy montrer que

$$\frac{1}{1-x} = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(S_n = 0)x^n \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(E_n)x^n \right).$$

6) Justifier que $\mathbb{P}(S_{2n+1} = 0) = 0$ pour tout n. On définit une suite de variables aléatoires indépendantes $(Y_i, i \geq 1)$ de la façon suivante : $Y_i = 1$ si $X_i = 1$ et 0 sinon. Justifier l'identité des événements

$$\{S_{2n} = 0\} = \left\{ \sum_{i=1}^{2n} Y_i = n \right\}.$$

Quelles sont les lois respectives de Y_i et $\sum_{i=1}^{2n} Y_i$? En déduire que

$$\mathbb{P}(S_{2n} = 0) = \frac{\binom{2n}{n}}{4^n}.$$

7) On rappelle que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\binom{2n}{n}}{4^n} x^{2n} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

montrer que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(E_n)x^n = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}.$$

8) En remarquant que l'événement $\{T = +\infty\}$ est inclus dans E_n pour tout n, montrer que pour tout $x \in [0, 1[$,

$$\mathbb{P}(T = +\infty)x^n \leq \mathbb{P}(E_n)x^n \text{ et en déduire que } \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(T = +\infty)x^n \leq \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(E_n)x^n.$$

Montrer que pour tout $x \in [0, 1[$

$$\mathbb{P}(T = +\infty) \leq \sqrt{1 - x^2}.$$

En faisant tendre x vers 1, montrer par encadrement que

$$\mathbb{P}(T = +\infty) = 0.$$

Qu'en déduisez vous pour la marche aléatoire, avec quelle probabilité retourne-t-elle à l'origine ?

Etude de l'espérance du temps de retour à l'origine :

9) Justifier que $\mathbb{P}(T > n) = \mathbb{P}(E_n)$ et en déduire que pour tout $x \in [0, 1[$,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(T > n) x^n = \sqrt{\frac{1 + x}{1 - x}}.$$

Montrer que

$$\sum_{n \geq 0} \mathbb{P}(T > n) = \infty.$$

Indication : prendre $x_k = 1 - \frac{1}{k}$ et utiliser un théorème du cours.

10) Montrer à l'aide du théorème de Fubini-Tonelli

$$\mathbb{E}[T] = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(T > k).$$

En déduire que

$$\mathbb{E}[T] = +\infty.$$

La moyenne du temps de retour à l'origine est donc infinie. Cette propriété remarquable est liée au faite que si la marche aléatoire s'éloigne beaucoup de 0, il lui faut beaucoup de temps pour y revenir.

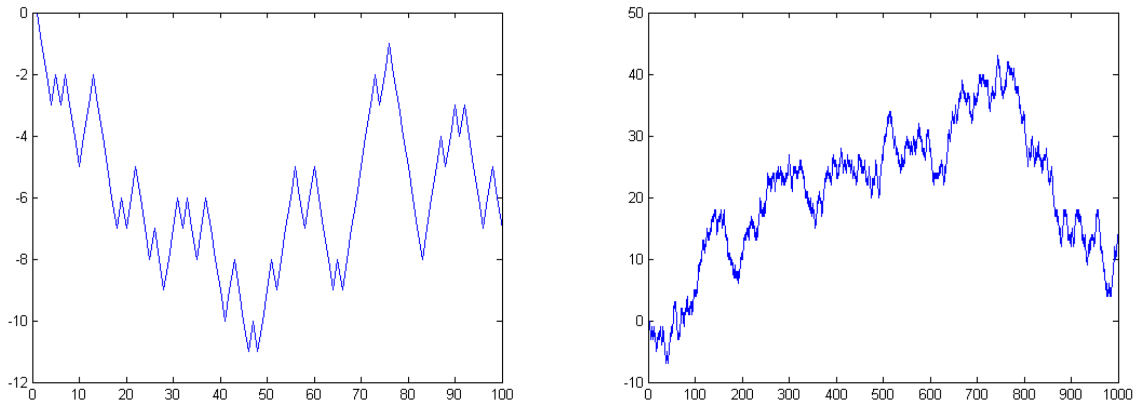


FIGURE 1 – Réalisation d'une marche aléatoire symétrique, n=100 et n=1000

Les marches aléatoires jouent un rôle important en théorie des probabilités. L'échelle de temps dans la simulation à droite est dix fois plus petite que celle de gauche. Cette courbe approche une fonction aléatoire célèbre : le mouvement Brownien. Cette fonction aléatoire est avec probabilité 1*, continue, non-dérivable, non monotone par morceaux. Ces fonctions très irrégulières sont typiques en théorie des probabilités (plus précisément en théorie des processus stochastiques.) Il n'est pas facile de construire des fonctions déterministes avec de telles propriétés. Le mouvement Brownien est enseigné en Macs2. Il est impliqué dans de nombreux modèles probabilistes pour la physique, la finance ou la biologie.*