Université Paris 13, Institut Galilée
Année universitaire 2016-2017

MACS 1 – Intégration et probabilités

Examen du 4 janvier 2017

Durée : 3 heures

Document autorisé : une page A4 de notes manuscrites. Appareils électroniques interdits.

Toute réponse doit être soigneusement rédigée et justifiée.

Exercice 1. Une variable aléatoire réelle X a pour densité

$$f : x \mapsto cx^2 \mathbb{1}_{[-1,1]}(x)$$

où c est une constante.
1. Déterminer la valeur de c. On remplacera désormais c par la valeur trouvée.
2. Calculer la fonction de répartition de X. La représenter graphiquement.
3. Calculer l'espérance et la variance de X.
4. On pose $Y = \tan \frac{\pi X}{2}$. Déterminer la loi de Y (on donnera sa densité).
5. Soit X' une variable aléatoire indépendante de X et de même loi que X. On note $Z = \max(X, X')$.
5.a) Calculer la fonction de répartition de Z.
5.b) En déduire que Z a une densité et la calculer.

Exercice 2. Soit (X, Y) une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^2$, de densité

$$f_{(X,Y)} : (x, y) \mapsto xe^{-x(y+1)} \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(x) \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(y).$$

1. Pour toute fonction mesurable bornée $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, exprimer $\mathbb{E}[g(Y)]$ à l'aide de $f_{(X,Y)}$ et en déduire la densité de la loi de Y.
2. On définit le couple de variables aléatoires $(U, V) = (X, XY)$.
2.a) Pour toute fonction mesurable bornée $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, exprimer $\mathbb{E}[g(U, V)]$ à l'aide de $f_{(X,Y)}$ et en déduire la densité de la loi de (U, V). *(On pourra faire un changement de variable)*
2.b) Est-ce que les variables aléatoires U et V sont indépendantes ? Quelles sont leurs lois ?

Exercice 3. Soit $p \in]0, 1[$. On considère une variable aléatoire X de loi géométrique de paramètre p : pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(X = k) = (1 - p)^{k-1}p$.
1. Calculer $\mathbb{E}\big[\frac{1}{X!}\big]$ (où $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n - 1)n$ pour $n \in \mathbb{N}$).
2. Déterminer pour quelles valeurs de $s \in \mathbb{R}$ la variable aléatoire s^X est intégrable.
3. Justifier l'intégrabilité de $Y = (-1)^X$ et calculer $\mathbb{E}[Y]$.
4. Soit X' une variable aléatoire indépendante de X, et ayant même loi que X. On pose $Z = X + X'$.
4.a) Calculer $\mathbb{E}[(-1)^Z]$.
4.b) Déterminer la loi de Z. *(On pourra remarquer que* $\{Z = k\} = \bigcup_{j \in \mathbb{N}^*} \{X = j, X' = k - j\}$ *pour* $k \in \cdots$*)*

Exercice 4. Soit X une variable aléatoire réelle, de densité

$$f : t \mapsto f(t) = \frac{1}{t^2}\mathbb{1}_{[1,+\infty[}(t).$$

1. Vérifier que f est bien une densité. La variable aléatoire X est-elle intégrable ?
2. Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue, et soit $x \in [1, +\infty[$.
2.a) Montrer que $g(X)\mathbb{1}_{\{X<x\}}$ est intégrable. *(On pourra d'abord justifier que cette variable aléatoire est bornée)*
2.b) Montrer que

$$\mathbb{E}[g(X)\mathbb{1}_{\{X<x\}}] = \int_1^x \frac{g(t)}{t^2}dt.$$

3. Pour tout réel $x \geq 1$, calculer les quantités $\mathbb{P}(X > x)$, $\mathbb{E}[X\mathbb{1}_{\{X<x\}}]$, $\mathbb{E}[X^2\mathbb{1}_{\{X<x\}}]$ et $\mathrm{Var}(X\mathbb{1}_{\{X<x\}})$.

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, ayant la densité f précédente. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note

$$S_n = X_1 + \cdots + X_n.$$

Les questions 4 et 5 sont indépendantes.
4. On définit aussi, pour tout n, la variable aléatoire

$$S'_n = X_1\mathbb{1}_{\{X_1 \leq n\ln n\}} + \cdots + X_n\mathbb{1}_{\{X_n \leq n\ln n\}}$$

et l'événement

$$A_n = \Big\{ \max_{1\leq k\leq n} X_k > n\ln n\Big\}.$$

4.a) Montrer que $\mathbb{P}(A_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. *(Calculer $\mathbb{P}((A_n)^c)$, ou bien écrire A_n comme union et utiliser la sous-additivité)*
4.b) En déduire que $\mathbb{P}(S_n \neq S'_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.
4.c) Calculer $\mathbb{E}[S'_n]$ et $\mathrm{Var}(S'_n)$, et montrer que $\dfrac{\mathrm{Var}(S'_n)}{\mathbb{E}[S'_n]^2} \underset{n}{\longrightarrow} 0$.
4.d) Montrer que si $(Z_n)_n$ est une suite de variables aléatoires de carrés intégrables telle que $\dfrac{\mathrm{Var}(Z_n)}{\mathbb{E}[Z_n]^2} \underset{n}{\longrightarrow} 0$, alors $\dfrac{Z_n}{\mathbb{E}[Z_n]}$ converge vers 1 en probabilité. *(Voir le rappel en bas de page, et utiliser une inégalité du cours)*
4.e) Conclure que $\dfrac{S'_n}{n\ln n} \xrightarrow[n]{(\mathrm{p})} 1$.
4.f) On souhaite montrer que $\dfrac{S_n}{n\ln n} \xrightarrow[n]{(\mathrm{p})} 1$. Montrer que, pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\mathbb{P}\Big(\Big|\frac{S_n}{n\ln n} - 1\Big| > \varepsilon,\ S_n \neq S'_n\Big) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

(on rappelle que la virgule signifie "et"), et que, pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\mathbb{P}\Big(\Big|\frac{S_n}{n\ln n} - 1\Big| > \varepsilon,\ S_n = S'_n\Big) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

(Dans les deux cas, on utilisera le fait que si deux événements vérifient $A \subset B$, alors $\mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$).
Conclure.
5. Soit $c > 0$. On considère la suite d'événements

$$B_n = \Big\{ \max_{2\leq k\leq n} \frac{X_k}{k\ln k} \leq c\Big\}.$$

5.a) La suite $(B_n)_n$ est-elle monotone ? Écrire $\lim_n \mathbb{P}(B_n)$ comme la probabilité d'un événement à préciser.
5.b) Montrer que $\mathbb{P}(B_n) \leq e^{-\frac{1}{c}H(n)}$ où $H(n) = \sum_{k=2}^n \frac{1}{k\ln k}$.
5.c) Conclure qu'il existe presque sûrement un entier $n \geq 2$ tel que $X_n \geq cn\ln n$.
5.d) Que peut-on en déduire pour la suite $\frac{S_n}{n\ln n}$?
5.e) Conclure que, presque sûrement, la suite $\frac{S_n}{n\ln n}$ ne converge pas.

> Rappel : une suite $(Z_n)_n$ de variables aléatoires converge en probabilité vers une variable aléatoire Z (ce que l'on note $Z_n \xrightarrow[n]{(\mathrm{p})} Z$) si, pour tout $\varepsilon > 0$,
>
> $$\mathbb{P}(|Z_n - Z| > \varepsilon) \underset{n}{\longrightarrow} 0.$$