Université Paris 13, Institut Galilée
Année universitaire 2017-2018

MACS 1 – Intégration et probabilités

Examen du 9 janvier 2018

Durée : 3 heures

Document autorisé : une page A4 de notes manuscrites. Appareils électroniques interdits.

Toute réponse doit être soigneusement rédigée et justifiée.

Exercice 1. On considère la fonction
$$f : t \mapsto \frac{a}{\sqrt{t}} \mathbb{1}_{]0,1[}(t),$$
où a est une constante.
1. Déterminer la valeur de a telle que f est une densité. On prendra cette valeur ensuite.
Soit X une variable aléatoire qui suit la loi de densité f.
2. Calculer la fonction de répartition de X.
3. Pour quelles valeurs de $\alpha \in \mathbb{R}$ la variable aléatoire X^α est-elle intégrable ?
4. Justifier que $E[X]$ a un sens et calculer sa valeur.
5. Montrer que $Y = \sqrt{X}$ suit la loi uniforme sur $[0, 1]$.
6. Déterminer la loi de $Z = \left\lfloor \frac{1}{Y} \right\rfloor$, où $\lfloor x \rfloor$ est la partie entière de x. *Indication : pour $k \in \mathbb{N}$, dans quel intervalle doit se trouver Y pour que l'on ait $\left\lfloor \frac{1}{Y} \right\rfloor = k$?*
7. Exprimer la probabilité que Z soit pair sous la forme d'une série. Vérifier que l'on a aussi
$$P(Z \text{ est pair}) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$$
et en déduire cette valeur.
8. Est-ce que Z est intégrable ? Est-ce que $\sqrt{Z}$ est intégrable ?

Exercice 2. On considère une suite de variables aléatoires $(Y_k)_{k \geq 1}$ définies sur $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, indépendantes et suivant la loi uniforme sur $[0, 1]$. On considère également une variable aléatoire N indépendante de $(Y_1, Y_2, \ldots)$, telle que N suit la loi géométrique de paramètre $\frac{1}{2}$ (pour $k \in \mathbb{N}^*$, $P(N = k) = 2^{-k}$). On va étudier
$$Z := \max\{Y_1, ..., Y_N\}.$$
1. Soit $t \in [0, 1]$.
1.a) Pour $n \in \mathbb{N}^\star$, calculer la probabilité $P(\max(Y_1, \ldots, Y_n) \leq t)$.
1.b) En déduire, pour $n \in \mathbb{N}^\star$, la probabilité $P(\{Z \leq t\} \cap \{N = n\})$.
1.c) En déduire la valeur de $P(Z \leq t)$.
2. En déduire la fonction de répartition de Z, puis le fait que Z a une densité que l'on précisera.
3. Justifier que Z a une espérance et la calculer.

Exercice 3. Soit X, Y des variables aléatoires de carré intégrable.
1. À quelle condition a-t-on $E[X^2] = 0$? On exclut ce cas dans la suite.
2. Vérifier que $R : \lambda \mapsto R(\lambda) = E[(X + \lambda Y)^2]$ est un polynôme de degré 2. D'après son signe, combien de racines peut-il avoir ? En déduire l'inégalité de Cauchy-Schwarz : $E[XY]^2 \leq E[X^2]E[Y^2]$.
3. Montrer que, pour tout $a \in [0, 1]$,
$$(1 - a)E[X] \leq E[X \mathbb{1}_{\{X > aE[X]\}}].$$
Indication : commencer par écrire $X = X\mathbb{1}_{\{X>aE[X]\}} + X\mathbb{1}_{\{X \leq aE[X]\}}$, prendre l'espérance et majorer un terme.
4. Déduire de tout ce qui précède que, pour tout $a \in [0, 1]$,
$$P(X > aE[X]) \geq (1 - a)^2 \frac{E[X]^2}{E[X^2]}.$$

Exercice 4. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $]0,1]$. On définit la fonction F sur $[0,+\infty[$ par :

$$\text{pour tout } s \geq 0, \qquad F(s) = E[X^s].$$

1. Justifier que $F(s)$ est bien défini, pour tout $s \geq 0$, et que $F(s) < \infty$.
2. Calculer F, lorsque
2.a) $X = e^{-Z}$, où Z suit la loi exponentielle de paramètre 1.
2.b) X suit la loi définie par :

$$\text{pour tout entier } k \geq 1, \qquad P\Big(X = \frac{1}{k}\Big) = \frac{1}{\zeta(2)k^2},$$

où, pour $s > 1$, $\zeta(s) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^s}$. La fonction F sera exprimée en termes de la fonction ζ.
3. Si X a pour densité f, exprimer $F(s)$ en fonction de f.
Dans la suite de cet exercice, on ne suppose pas que X a une densité. Cependant, si cela vous paraît plus simple, vous pouvez le supposer (vous n'aurez alors pas tous les points).
4. Montrer que F est continue sur $[0,+\infty[$.
5. On suppose maintenant de plus que $Z = -\ln X$ est intégrable.
5.a) Montrer que F est dérivable sur $[0,+\infty[$ et exprimer $F'(s)$ sous la forme d'une espérance. Que vaut en particulier $F'(0)$?
5.b) En déduire un développement limité de F à l'ordre 1 au voisinage de 0.
5.c) En déduire que $F(s)^{1/s}$ admet une limite quand $s \to 0^+$, que l'on précisera. Vérifier le résultat obtenu dans le cas de la question 2.a).

L'exercice suivant utilise la "loi forte des grands nombres" dont on rappelle l'énoncé : pour toute suite $(X_n)_{n\geq 1}$ de variables aléatoires réelles intégrables, indépendantes et de même loi,

$$\text{presque sûrement,} \qquad \frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} E[X_1].$$

Le but de l'exercice est d'étudier le cas où les variables X_i ne sont pas intégrables, mais sont supposées positives.

Exercice 5. Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes. On suppose qu'elles suivent la même loi, telle que $0 \leq X_1 < \infty$ presque sûrement, et $E[X_1] = \infty$.
1. Donner un exemple de loi pour X_1 qui vérifie ces hypothèses.
2. Soit $k \in \mathbb{N}$. Pour tout n, on pose $Y_n^{(k)} = \min(X_n, k)$.
2.a) Que peut-on dire de la suite $(Y_1^{(k)})_{k\geq 0}$? (On pourra décrire $Y_1^{(0}, Y_1^{(1)}, \ldots$ plus explicitement)
2.b) Justifier les propriétés suivantes :

- $Y_1^{(k)}$ est intégrable ;
- $E[Y_1^{(k)}] \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

3. Soit $k \in \mathbb{N}$.
3.a) Montrer que, presque sûrement, la suite suivante converge quand $n \to \infty$:

$$\frac{\min(X_1,k) + \cdots + \min(X_n,k)}{n}$$

et donner sa limite.
3.b) En déduire que, presque sûrement, il existe n_0 tel que, pour tout $n \geq n_0$,

$$\frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} \geq \frac{1}{2}E[Y_1^{(k)}].$$

4. Conclure que, presque sûrement,

$$\frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$