

Examen final du 21 juin 2013
Éléments de correction

Durée : 3 heures

Feuille A4 de notes autorisée, autres notes et appareils électroniques interdits.

Toute réponse doit être soigneusement rédigée et justifiée.

Exercice 1. Une variable aléatoire réelle X a pour densité

$$f : x \mapsto cx^2 \mathbf{1}_{[-1,1]}$$

où c est une constante.

1. Déterminer la valeur de c. On remplacera désormais c par la valeur trouvée.

Bien sûr, comme f est une densité, son intégrale vaut 1, ce qui donne

$$1 = \int f(x)dx = c \int_{\mathbb{R}} x^2 \mathbf{1}_{[-1,1]}(x)dx = c \int_{-1}^{1} x^2 dx = \frac{2}{3} c$$

d'où $c = 3/2$.

2. Calculer la fonction de répartition de X.

Par définition, la fonction de répartition de X est donnée pour $t \in \mathbb{R}$, par

$$F_X(t) = P(X \le t) = \int_{-\infty}^{t} \frac{3}{2} x^2 \mathbf{1}_{[-1,1]}(x)dx.$$

Comme la fonction dans l'intégrale est nulle hors de $[-1, 1]$, on distingue trois cas : si $t < -1$, alors $F_X(t) = 0$; si $t > 1$, alors $F_X(t) = 1$; et, si $-1 \le t \le 1$, alors

$$F_X(t) = \int_{-1}^{t} \frac{3}{2} x^2 dx = \frac{t^3 + 1}{2}.$$

3. Calculer l'espérance et la variance de X.

On calcule

$$E[X] = \int x f(x)dx = \int_{-1}^{1} \frac{3}{2} x^3 dx = 0$$

et

$$E[X^2] = \int x^2 f(x)dx = \int_{-1}^{1} \frac{3}{2} x^4 dx = \frac{3}{5}$$

d'où $\mathrm{Var}(X) = E[X^2] - E[X]^2 = \frac{3}{5}$.

4. On pose $Y = X^2$. Quelle est la loi de Y ?

Tout d'abord on peut remarquer que Y est à valeurs dans $[0, 1]$ car X est à valeurs dans $[-1, 1]$. On donne deux méthodes :

a) On calcule la fonction de répartition de Y. On a déjà, si $t \le 0$, $F_Y(t) = P(Y \le t) = 0$, et si $t > 1$ alors $F_Y(t) = 1$ vu que $Y \in [0, 1]$ p.s. De plus, si $0 \le t \le 1$, on a

$$F_Y(t) = P(Y \le t) = P(X^2 \le t) = P(-\sqrt{t} \le X \le \sqrt{t}) = \int_{-\sqrt{t}}^{\sqrt{t}} f(x)dx = \frac{1}{2}\left((\sqrt{t})^3 - (-\sqrt{t})^3\right) = t^{3/2}.$$

La fonction F_Y est de classe C^1 par morceaux, donc sa dérivée donne la densité de la loi de Y :

$$f_Y(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ \frac{3}{2}\sqrt{t} & \text{si } 0 \leq t \leq 1 \\ 0 & \text{si } t > 1 \end{cases} = \frac{3}{2}\sqrt{t}\mathbf{1}_{[0,1]}(t).$$

b) On calcule directement la densité de Y, à l'aide d'un changement de variable. Pour toute fonction mesurable $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$, on a

$$\begin{aligned} E[g(Y)] = E[g(X^2)] &= \int g(x^2)f(x)dx = \int_{-1}^{1} g(x^2)\frac{3}{2}x^2dx \\ &= 3\int_0^1 g(x^2)x^2dx = 3\int_0^1 g(y)y\frac{dy}{2\sqrt{y}} = \int_0^1 g(y)\frac{3}{2}\sqrt{y}dy \\ &= \int_{\mathbb{R}} g(y)\frac{3}{2}\sqrt{y}\mathbf{1}_{[0,1]}(y)dy \end{aligned}$$

(pour effectuer le changement de variable $x \mapsto y = x^2$, il était important de se ramener d'abord à une intégrale sur $[0,1]$ car cette fonction est injective sur $[0,1]$, alors qu'elle ne l'est pas sur $[-1,1]$, et ne donne donc pas un difféomorphisme). Ceci montre que Y a pour densité

$$f_Y : y \mapsto \frac{3}{2}\sqrt{y}\mathbf{1}_{[0,1]}(y).$$

Exercice 2. Soit (X,Y) une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^2$, de densité

$$f_{(X,Y)} : (x,y) \mapsto xe^{-x(y+1)}\mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(x)\mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(y).$$

1. Calculer la densité de la loi de Y.

Par le cours, la densité de Y est donnée par

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= \int_{\mathbb{R}} f_{(X,Y)}(x,y)dx \\ &= \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(y)\int_0^{\infty} xe^{-x(y+1)}dx \\ &= \frac{\mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(y)}{(y+1)^2} \end{aligned}$$

(en faisant une intégration par parties).

2. On définit le couple de variables aléatoires $(U,V) = (X,XY)$.
2.a) Calculer la densité de la loi de (U,V).

Pour toute fonction mesurable $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_+$, on a

$$\begin{aligned} E[g(U,V)] = E[g(X,XY)] &= \int g(x,xy)dP_{(X,Y)}(x,y) \\ &= \iint g(x,xy)f_{(X,Y)}(x,y)dxdy \\ &= \int_0^{\infty}\int_0^{\infty} g(x,xy)xe^{-x(y+1)}dxdy. \end{aligned}$$

On va effectuer le changement de variable $(x,y) \mapsto (u,v) = (x,xy)$ c'est-à-dire

$$(x,y) = (u,\frac{v}{u}).$$

Pour tous réels x,y et u,v, il y a équivalence entre

$$x > 0, \quad y > 0, \quad u = x, \quad v = xy$$

et

$$u > 0, \quad v > 0, \quad x = u, \quad y = \frac{v}{u}.$$

Par suite, $\varphi : (u,v) \mapsto (x,y) = (u, \frac{v}{u})$ est une bijection de $]0,+\infty[^2$ dans $]0,+\infty[^2$. Comme φ et φ^{-1} sont de classe $\mathcal{C}^1$, c'est donc un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de $]0,+\infty[^2$ dans $]0,+\infty[^2$, et on peut appliquer le théorème de changement de variable. On a

$$J\varphi(u,v) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{v}{u^2} & \frac{1}{u} \end{vmatrix} = \frac{1}{u}.$$

Ainsi, pour toute fonction mesurable $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_+$,

$$\begin{aligned} E[g(U,V)] &= \int_0^\infty \int_0^\infty g(u,v) u e^{-v-u} \frac{1}{u} du dv \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} g(u,v) e^{-u-v} \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(u) \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(v) du dv \end{aligned}$$

donc (U,V) a pour densité

$$f_{(U,V)} : (u,v) \mapsto e^{-u-v} \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(u) \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(v).$$

2.b) Est-ce que les variables aléatoires U et V sont indépendantes ? Quelles sont leurs lois ?

On constate que l'on peut écrire $f_{(U,V)}(u,v) = e^{-u}\mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(u) \times e^{-v}\mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(v)$ pour tous $u, v \in \mathbb{R}$. Comme $f_{(U,V)}(u,v)$ est le produit d'une fonction de u par une fonction de v, les variables aléatoires U et V sont indépendantes. De plus, leurs densités sont proportionnelles à $u \mapsto e^{-u}\mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(u)$ et à $v \mapsto e^{-v}\mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(v)$ (toujours par le cours) ; mais ces fonctions *sont* déjà des densités (la densité de la loi exponentielle de paramètre 1) donc il n'y a pas à trouver le coefficient de proportionnalité. Ainsi, U et V sont deux variables aléatoires indépendantes qui suivent la loi exponentielle de paramètre 1.

Exercice 3. On dispose de N boîtes numérotées de 1 à N. On répartit n boules dans ces boîtes de la façon suivante : chaque boule est placée dans une boîte choisie uniformément et indépendamment des autres boules (une boîte peut donc contenir plusieurs boules). Autrement dit, si X_i est le numéro de la boîte où on place la boule i, alors $X_1, \dots, X_n$ sont des variables aléatoires indépendantes et de loi uniforme dans $\{1, \dots, N\}$.
Pour $k = 1, \dots, N$, on pourra noter N_k le nombre de boules dans la boîte k.
1. Quelle est la loi du nombre de boules dans la boîte 1 ? Quelle est son espérance ?

Chaque boule (de 1 à n) est placée dans la boîte 1 avec probabilité $\frac{1}{N}$, et ces n choix sont indépendants. Par le cours, le nombre de boules dans la boîte 1 suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n, \frac{1}{N})$ (c'est le nombre de réussites parmi n tentatives indépendantes qui chacune ont une probabilité $\frac{1}{N}$ de succès).
En particulier, son espérance est $n\frac{1}{N} = \frac{n}{N}$.

2. Pour $i = 1, \dots, N$, on note A_i l'événement « la boîte i est vide ». Que vaut $P(A_1)$?

On a $P(A_1) = P(N_1 = 0)$, or la question 1 a montré que N_1 suit la loi $\mathcal{B}(n, \frac{1}{N})$ donc $P(A_1) = \left(1 - \frac{1}{N}\right)^n$. De façon plus directe, la boîte 1 est vide si chacune des n boules est placée dans une boîte autre que la boîte 1 ; or la probabilité qu'une boule soit placée dans une boîte autre que la boîte 1 est $1 - \frac{1}{N}$, et les boules sont placées indépendamment, d'où la probabilité

$$P(A_1) = P(N_1 = 0) = P(X_1 \neq 1, X_2 \neq 1, \dots, X_n \neq 1) = P(X_1 \neq 1) \cdots P(X_n \neq 1) = \left(1 - \frac{1}{N}\right)^n.$$

3. Que vaut $P(A_1 \cap A_2)$? Est-ce que A_1 et A_2 sont indépendants ? Donner une justification rigoureuse **et** une justification « intuitive ».

$A_1 \cap A_2$ est l'événément « les boîtes 1 et 2 sont vides ». Cela signifie que les n boules ont été placées dans l'une des $N-2$ boîtes restantes, et ces boules sont indépendantes donc (même raisonnement que dans la question précédente)

$$P(A_1 \cap A_2) = \left(\frac{N-2}{N}\right)^n.$$

Par définition, A_1 et A_2 seraient indépendants si $P(A_1 \cap A_2) = P(A_1)P(A_2)$. Or on a

$$P(A_1)P(A_2) = P(A_1)^2 = \left(\frac{N-1}{N}\right)^{2n}$$

et cette quantité est en général différente de $\left(\frac{N-2}{N}\right)^n$, donc A_1 et A_2 ne sont pas indépendants. C'est tout à fait logique : dès lors que l'on sait que la boîte 1 est vide, il devient moins probable que la boîte 2 le soit aussi car le nombre d'urnes a été restreint. On pourrait d'ailleurs retrouver $P(A_1 \cap A_2)$ ainsi : savoir que la boîte 1 est vide revient à placer les boules de manière uniforme dans les $N-1$ autres boîtes, donc la probabilité que la boîte 2 soit vide aussi sachant que la première est vide est $\left(1 - \frac{1}{N-1}\right)^n$, d'où

$$P(A_1 \cap A_2) = P(A_1)P(A_2|A_1) = \left(1 - \frac{1}{N}\right)^n \left(1 - \frac{1}{N-1}\right)^n = \left(\frac{N-2}{N}\right)^n.$$

4. On note V le nombre de boîtes vides.
4.a) Exprimer V à l'aide de $A_1, \dots, A_N$. *(Penser aux fonctions indicatrices).*

V est le nombre d'événements parmi $A_1, \dots, A_N$ qui se réalisent, donc

$$V = \mathbf{1}_{A_1} + \cdots + \mathbf{1}_{A_N}.$$

4.b) En déduire l'espérance du nombre de boîtes vides.

On a donc

$$E[V] = E[\mathbf{1}_{A_1}] + \cdots + E[\mathbf{1}_{A_N}] = P(A_1) + \cdots + P(A_N) = NP(A_1) = N\left(1 - \frac{1}{N}\right)^n.$$

4.c) Exprimer V^2 à l'aide de $A_1, \dots, A_N$, et en déduire que

$$E[V^2] = N(N-1)\left(1 - \frac{2}{N}\right)^n + N\left(1 - \frac{1}{N}\right)^n$$

puis donner une expression de $\mathrm{Var}(V)$.

On a, en développant le carré,

$$V^2 = (\mathbf{1}_{A_1} + \cdots + \mathbf{1}_{A_N})^2 = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{1}_{A_i}^2 + \sum_{i \neq j} \mathbf{1}_{A_i}\mathbf{1}_{A_j}$$

(où i, j sont entre 1 et N). On remarque que $\mathbf{1}_A^2 = \mathbf{1}_A$ et $\mathbf{1}_A\mathbf{1}_B = \mathbf{1}_{A\cap B}$ pour tous événements A et B. Ainsi,

$$V^2 = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{1}_{A_i} + \sum_{i \neq j} \mathbf{1}_{A_i \cap A_j} = V + \sum_{i \neq j} \mathbf{1}_{A_i \cap A_j}.$$

Par suite,

$$E[V^2] = E[V] + \sum_{i \neq j} P(A_i \cap A_j).$$

Pour tous $i \neq j$, $P(A_i \cap A_j) = P(A_1 \cap A_2)$, car les boîtes jouent des rôles symétriques. De plus, le nombre de termes dans la somme est $N(N-1)$. On a donc

$$E[V^2] = N\left(1 - \frac{1}{N}\right)^n + N(N-1)\left(\frac{N-2}{N}\right)^n.$$

Et par suite

$$\mathrm{Var}(V) = E[V^2] - E[V]^2 = N\left(1 - \frac{1}{N}\right)^n + N(N-1)\left(\frac{N-2}{N}\right)^n - N^2\left(1 - \frac{1}{N}\right)^{2n}.$$

On suppose désormais que $N = n$. On note V_n au lieu de V.

5. Quelle est la limite de $\dfrac{E[V_n]}{n}$? On la note ℓ.

On a
$$\frac{E[V_n]}{n} = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = \exp\left(n\ln(1 - \frac{1}{n})\right),$$
et $\ln(1 - \frac{1}{n}) \sim -\frac{1}{n}$ d'où
$$\frac{E[V_n]}{n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} e^{-1}.$$

6. *(On pourra admettre cette question pour la suite)* Montrer que, quand $n \to \infty$, $\mathrm{Var}(V_n) \sim Cn$ pour une constante C à préciser.

En effectuant des développements limités, on obtient
$$\mathrm{Var}(V_n) \sim (e^{-1} - e^{-2})n.$$

7. À l'aide d'une inégalité du cours, montrer que la proportion de boîtes vides (c'est-à-dire $\dfrac{V_n}{n}$) converge en probabilité vers ℓ.

Soit $\delta > 0$. Il faut montrer que
$$P\left(\left|\frac{V_n}{n} - \ell\right| > \delta\right) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$
On commence par appliquer l'inégalité de Tchebychev :
$$P\left(\left|\frac{V_n}{n} - E\left[\frac{V_n}{n}\right]\right| > \delta\right) \leq \frac{\mathrm{Var}(V_n/n)}{\delta^2}.$$
On a, par la question précédente,
$$\mathrm{Var}(\frac{V_n}{n}) = \frac{\mathrm{Var}\, V_n}{n^2} \sim \frac{Cn}{n^2} = \frac{C}{n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$
donc en reprenant l'inégalité ci-dessus,
$$P\left(\left|\frac{V_n}{n} - E\left[\frac{V_n}{n}\right]\right| > \delta\right) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0. \qquad (*)$$
Il reste à se rappeler que $E\left[\frac{V_n}{n}\right] = \frac{E[V_n]}{n} \longrightarrow \ell$ de sorte que, pour n grand, $\left|E\left[\frac{V_n}{n}\right] - \ell\right| < \frac{\delta}{2}$. Ainsi, si $\frac{V_n}{n}$ et ℓ sont distants de plus de δ, alors $\frac{V_n}{n}$ et $E[\frac{V_n}{n}]$ sont distants de plus de $\frac{\delta}{2}$, d'où :
$$P\left(\left|\frac{V_n}{n} - \ell\right| > \delta\right) \leq P\left(\left|\frac{V_n}{n} - E\left[\frac{V_n}{n}\right]\right| > \frac{\delta}{2}\right) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$
par $(*)$ (appliqué à $\frac{\delta}{2}$). C'est ce que l'on voulait, d'où la conclusion.

Exercice 4. On considère la loi dite *logistique*, admettant pour densité la fonction
$$f : x \mapsto c\frac{e^{-x}}{(1 + e^{-x})^2}$$
définie sur $\mathbb{R}$, où c est une constante.

1. Déterminer c. On remplacera désormais c par la valeur trouvée.

L'intégrale d'une densité vaut 1, d'où
$$1 = c\int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-x}}{(1 + e^{-x})^2}dx = c\left[\frac{1}{1 + e^{-x}}\right]_{x=-\infty}^{x=+\infty} = c(1 - 0) = c.$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $X_1, \dots, X_n$ une famille de variables aléatoires indépendantes distribuées selon une loi logistique.
2.a) Quelle est la loi de $M_n = \max(X_1, \dots, X_n)$? On donnera sa fonction de répartition et sa densité.

> On commence par calculer la fonction de répartition de la loi logistique : pour tout $t \in \mathbb{R}$,
>
> $$P(X_1 \le t) = \int_{-\infty}^{t} \frac{e^{-x}}{(1+e^{-x})^2} dx = \frac{1}{1+e^{-t}}.$$
>
> Puis, pour tout $t \in \mathbb{R}$,
>
> $$F_{M_n}(t) = P(M_n \le t) = P(\max(X_1, \dots, X_n) \le t) = P(X_1 \le t, \dots, X_n \le t) = P(X_1 \le t) \cdots P(X_n \le t).$$
>
> (On a utilisé le fait $X_1, \dots, X_n$ sont indépendantes) d'où
>
> $$F_{M_n}(t) = \frac{1}{(1+e^{-t})^n}.$$
>
> Cette fonction est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, donc M_n a une densité f_{M_n} qui s'obtient en dérivant F_{M_n} : pour tout $t \in \mathbb{R}$,
>
> $$f_{M_n}(t) = \frac{ne^{-t}}{(1+e^{-t})^{n+1}}.$$

2.b) On pose

$$Y_n = M_n - \log n.$$

Calculer la fonction de répartition de Y_n, et en déduire la convergence en loi de Y_n quand $n \to \infty$.

> La fonction de répartition se déduit de celle de M_n : pour tout $t \in \mathbb{R}$,
>
> $$F_{Y_n}(t) = P(Y_n \le t) = P(M_n - \log n \le t) = P(M_n \le t + \log n) = F_{M_n}(t + \log n)$$
>
> d'où
>
> $$F_{Y_n}(t) = \frac{1}{(1+e^{-t-\log n})^n} = \frac{1}{(1+\frac{e^{-t}}{n})^n}.$$
>
> Quand $n \to \infty$, le dénominateur converge vers $e^{e^{-t}}$. Donc, pour tout $t \in \mathbb{R}$,
>
> $$F_{Y_n}(t) \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} e^{-e^{-t}}.$$
>
> La fonction $t \mapsto e^{-e^{-t}}$ est croissante, tend vers 0 en $-\infty$ et en 1 en $+\infty$; c'est donc la fonction de répartition d'une loi (appelée loi de Gumbel). La convergence précédente montre que la loi de Y_n converge vers cette loi.

Exercice 5. Soit $(X_n)_{n\ge1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes. On suppose qu'elles suivent la même loi, telle que $0 \le X_1 < \infty$ presque sûrement, et $E[X_1] = \infty$.
1. Donner un exemple de loi pour X_1 qui vérifie ces hypothèses.

> La loi de Cauchy *n'est pas* un exemple car elle n'est pas à valeurs dans $\mathbb{R}_+$. Par contre, si Y suit la loi de Cauchy (de densité $t \mapsto \frac{1}{\pi(1+t^2)}$), alors la loi de $X_1 = |Y|$ vérifie les hypothèses : $X_1 \ge 0$ et $E[X_1] = E[|Y|] = \infty$.
> On peut aussi donner un exemple plus explicite : la loi de densité $x \mapsto \frac{1}{x^2}\mathbf{1}_{[1,+\infty[}$ (on vérifie facilement que c'est une densité) est à valeurs dans $\mathbb{R}_+$, et son espérance est $\int_1^\infty x\frac{1}{x^2}dx = \infty$.

2. Soit $M \in \mathbb{N}$. Pour tout n, on pose $Y_n^{(M)} = \min(X_n, M)$.
2.a) Que peut-on dire de la suite $(Y_1^{(M)})_{M\ge0}$?

> Cette suite est croissante, et stationne en X_1.
> On peut même la décrire complètement. La suite part de 0 et croît par sauts de 1 (c'est donc 0, 1, 2, 3,...), jusqu'à ce que la valeur dépasse X_1, et à partir de ce moment-là la suite stationne en X_1.

2.b) Justifier les propriétés suivantes :

- $Y_1^{(M)}$ est intégrable ;

- $E[Y_1^{(M)}] \underset{M\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

> Comme $0 \leq Y_1^{(M)} = \min(X_1, M) \leq M$, et que M est intégrable (c'est une constante donc son intégrale est $E[|M|] = M < \infty$), on déduit que $Y_1^{(M)}$ est intégrable.
> Comme la suite $(Y_1^{(M)})_{M\in\mathbb{N}}$ est positive est croissante, le théorème de convergence monotone montre que
>
> $$\lim_{M\to\infty}\uparrow E[Y_1^{(M)}] = E[\lim_{M\to\infty}\uparrow Y_1^{(M)}] = E[X_1] = \infty.$$

3. Soit $M \in \mathbb{N}$.
3.a) Montrer que la suite suivante converge presque sûrement quand $n \to \infty$:

$$\frac{\min(X_1, M) + \cdots + \min(X_n, M)}{n}$$

et donner sa limite.

> Comme les variables aléatoires $(Y_n^{(M)})_{n\geq 0}$ sont indépendantes, de même loi, et intégrables (par la question 2b), la loi forte des grands nombres montre que
>
> $$\frac{Y_1^{(M)} + \cdots + Y_n^{(M)}}{n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} E[Y_1^{(M)}]$$
>
> presque sûrement. C'est la réponse à la question.

3.b) En déduire que, presque sûrement, il existe n_0 tel que, pour tout $n \geq n_0$,

$$\frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} \geq \frac{1}{2}E[Y_1^{(M)}].$$

> Comme $E[Y_1^{(M)}] > \frac{1}{2}E[Y_1^{(M)}]$ (car cette quantité est strictement positive), et que la suite précédente converge presque sûrement vers $E[Y_1^{(M)}]$, elle est presque sûrement supérieure à $\frac{1}{2}E[Y_1^{(M)}]$ à partir d'un certain rang.

4. Conclure que, presque sûrement,

$$\frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$

> Soit $A > 0$. Comme $E[Y_1^{(M)}] \to +\infty$ quand $M \to \infty$ (par 2b), il existe M tel que $E[Y_1^{(M)}] > 2A$.
> Alors, par la question précédente, presque sûrement, il existe n_0 tel que, pour tout $n \geq n_0$, $\frac{X_1+\cdots+X_n}{n} \geq \frac{1}{2}E[Y_1^{(M)}] > A$.
> Ceci vaut pour tout $A > 0$, donc on a montré que : presque sûrement,
>
> $$\frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$
>
> Autrement dit, la conclusion de l'exercice est que la loi des grands nombres reste valable même si les variables ont une espérance infinie (du moment qu'elles sont positives, de sorte que l'espérance a tout de même un sens). On a démontré cette extension en « tronquant » les variables aléatoires X_i au niveau M pour se ramener à la loi des grands nombres habituelle, puis en faisant tendre M vers l'infini. C'est une méthode classique de démonstration.