Exercices corrigés en cours

Exercice 1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction borélienne.
1. On suppose $f \geq 0$. Montrer que l'on a

$$\int_{[0,1]} \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(x+n)\, dx = \int_{\mathbb{R}} f(x)dx.$$

2. En déduire que, si f est intégrable (par rapport à λ) sur $\mathbb{R}$, alors la série $\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(x+n)$ converge pour presque-tout $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 2.
1. Justifier que, pour tout $x \geq 0$,

$$\sum_{n\geq 1} \mathbb{1}_{[n,+\infty[}(x) = \lfloor x \rfloor$$

où $\lfloor x \rfloor$ désigne la partie entière de x.
2. En déduire que, pour toute fonction mesurable $f : E \to \mathbb{R}_+$,

$$\sum_{n\geq 1} \mu(\{x \in E : f(x) \geq n\}) = \int \lfloor f \rfloor\, d\mu.$$

3. Dans le cas où μ est finie, en déduire que

$$\int f d\mu < \infty \Leftrightarrow \sum_{n\geq 1} \mu(\{x \in E : f(x) \geq n\}) < \infty.$$

Quelle implication est vraie en général ?

Exercice 3. Soit $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite de fonctions mesurables $E \to \mathbb{R}$. Justifier que la proposition suivante est simplement un cas particulier du théorème de Fubini-Lebesgue, mais aussi une conséquence du théorème de convergence dominée :

$$\text{si} \quad \sum_{n\geq 0} \int |f_n| d\mu < \infty \qquad \text{alors} \qquad \sum_{n\geq 0} f_n \in L^1(E, \mathcal{A}, \mu) \text{ et } \int \Big(\sum_{n\geq 0} f_n\Big) d\mu = \sum_{n\geq 0} \int f_n d\mu$$

Il s'agit d'une écriture du théorème de Fubini-Lebesgue pour le produit de la mesure μ et de la mesure de comptage $\mu_{\mathbb{N}}$ sur $\mathbb{N}$. En effet, pour toute fonction mesurable $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, si $\sum_n |\phi(n)| < \infty$, alors ϕ est intégrable par rapport à $\mu_{\mathbb{N}}$ et

$$\int \phi\, d\mu_{\mathbb{N}} = \sum_n \phi(n).$$

Or pour $f : \mathbb{N} \times E \to \mathbb{R}$ définie par $f : (n,x) \mapsto f_n(x)$ mesurable, par le théorème de Fubini-Tonelli,

$$\int |f| d(\mu_{\mathbb{N}} \otimes \mu) = \int \Big(\int |f_n(x)| d\mu(x)\Big) d\mu_{\mathbb{N}}(n) = \int \Big(\int |f_n(x)| d\mu_{\mathbb{N}}(n)\Big) d\mu(x),$$

ce qui se réécrit donc

$$\int |f| d(\mu_{\mathbb{N}} \otimes \mu) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \Big(\int |f_n| d\mu\Big) = \int \sum_{n\in\mathbb{N}} |f_n| d\mu.$$

Le théorème de Fubini-Lebesgue énonce alors que si cette quantité est finie, alors on peut l'écrire sans parenthèses. C'est le résultat annoncé.
On pourrait aussi faire appel au théorème de convergence dominée : si $\sum_n \int |f_n| d\mu < \infty$, alors par convergence monotone pour les séries à termes positifs, $\int \sum_n |f_n| d\mu = \sum_n \int |f_n| d\mu < \infty$ donc la fonction $S = \sum_{n\geq 0} f_n$ est définie presque partout (série absolument convergente), et les sommes partielles $S_N = \sum_{n=0}^N f_n$ satisfont $S_N \to S$ presque partout et $|S_N| \leq \sum_{n=0}^N |f_n| \leq \sum_{n\geq 0} |f_n|$ par inégalité triangulaire, qui est intégrable par ce qui précède, donc le théorème de convergence dominée s'applique et donne $\int S_n d\mu \to \int S d\mu$. Comme $\int S_n d\mu = \sum_{n=0}^N \int f_n d\mu$, ceci montre que la série $\sum_n \int f_n d\mu$ converge et $\sum_n \int f_n d\mu = \int S d\mu = \int \sum_n f_n d\mu$.

Exercice 4. Montrer que la fonction Gamma $\Gamma : x \mapsto \Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}dt$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0,+\infty[$. Que valent les limites de Γ en 0^+ et en $+\infty$?

Limites en 0^+ et $+\infty$. On note que, quand $x \to 0^+$, $t^{x-1}e^{-t}$ converge vers $t^{-1}e^{-t}$, qui vérifie $\int_0^\infty t^{-1}e^{-t}dt = +\infty$. Ces fonctions sont positives, mais on ne peut appliquer le théorème de convergence monotone car il n'y a pas de monotonie. Par contre, on peut ou bien

– découper l'intégrale $\Gamma(x) = \int_0^1 t^{x-1}e^{-t}dt + \int_1^\infty t^{x-1}e^{-t}dt$ et appliquer le théorème de convergence monotone sur chaque morceau vu que t^{x-1} décroît avec x pour $t < 1$, et croît avec x pour $t > 1$.
  Soit $(x_n)_n$ une suite qui décroît vers 0. Le théorème de convergence monotone donne
  $$\lim_n\uparrow \int_1^\infty t^{x_n-1}e^{-t}dt = \int_1^\infty t^{-1}e^{-t}dt = \infty.$$
  Comme $\Gamma(x_n) \geq \int_1^\infty t^{x_n-1}e^{-t}dt$, on en déduit que $\Gamma(x_n) \to +\infty$. Ceci vaut pour toute suite $(x_n)_n$ qui décroît vers 0 donc $\Gamma(x) \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} +\infty$.
  Soit $(x_n)_n$ une suite qui croît vers $+\infty$. Le théorème de convergence monotone donne
  $$\lim_n\uparrow \int_0^1 t^{x_n-1}e^{-t}dt = \int_0^1 t^{-1}e^{-t}dt = \infty.$$
  et on conclut de même.
  Remarque : si $(f_n)_n$ décroît vers $f \geq 0$, on n'a pas toujours $\int f_n d\mu \to \int f d\mu$ (penser au cas où $f_n(x) = 1/n$ pour tout $x \in \mathbb{R}$). Par contre, c'est vrai dès que $\int f_{n_0} d\mu < \infty$ pour un n_0, car alors on peut appliquer le théorème de convergence dominée vu que $0 \leq f_n \leq f_{n_0}$ si $n \geq n_0$, et $f_{n_0} \in L^1$; ou encore le théorème de convergence monotone à la suite croissante $(f_{n_0} - f_n)_{n\geq n_0}$.
– ou utiliser le lemme de Fatou (les fonctions sont positives) : pour toute suite x_n qui tend vers 0 à droite,
$$\infty = \int_0^\infty t^{-1}e^{-t}dt = \int_0^\infty \liminf_n t^{x_n-1}e^{-t}dt \leq \liminf_n \int_0^\infty t^{x_n-1}e^{-t}dt$$
ce qui donne
$$\Gamma(x_n) = \int_0^\infty t^{x_n-1}e^{-t}dt \underset{n}{\longrightarrow} +\infty.$$
Ceci vaut pour toute suite $x_n \to 0^+$, d'où le résultat : $\Gamma(x) \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} +\infty$.

Exercice 5. Soit $a, b > 0$.

1. On suppose $a, b > 1$. Calculer $\lambda_2(D)$ où D est l'ouvert délimité par les courbes d'équation $y = ax$, $y = x/a$, $y = b/x$ et $y = 1/(bx)$ et contenant le point $(1, 1)$. *On posera $x = u/v$ et $y = uv$.*

Faire un dessin du domaine D !
On souhaite calculer
$$\lambda_2(D) = \int_D dx\,dy.$$
Effectuer le changement de variable donné revient à trouver le domaine image, vérifier que l'application est bien un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme, et calculer son jacobien. On a, pour tous $x, y, u, v > 0$,
$$x = \frac{u}{v},\ y = uv \quad \Leftrightarrow \quad u = \sqrt{xy},\ v = \sqrt{\frac{y}{x}}$$
et
$$\begin{aligned}(x,y) \in D \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{1}{a}x < y < ax,\ \frac{1}{bx} < y < \frac{b}{x}\\ &\Leftrightarrow \quad \frac{1}{a} < \frac{y}{x} < a,\ \frac{1}{b} < xy < b\\ &\Leftrightarrow \quad \frac{1}{\sqrt{a}} < \sqrt{\frac{y}{x}} < \sqrt{a},\ \frac{1}{\sqrt{b}} < \sqrt{xy} < \sqrt{b}\end{aligned}$$
Ainsi, $\varphi : (u, v) \mapsto (u/v, uv)$ est une bijection entre le rectangle $]1/\sqrt{b}, \sqrt{b}[\times]1/\sqrt{a}, \sqrt{a}[$ et D (qui sont des ouverts), et $\varphi^{-1}(x, y) = (\sqrt{xy}, \sqrt{\frac{y}{x}})$. C'est bien un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme (les fonctions φ et φ^{-1} sont même $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[^2$). Après changement de variable, l'intégrale s'exprimera en termes de u et v, donc il faut calculer le jacobien de φ :
$$\mathrm{J}_\varphi(u, v) = \begin{vmatrix} 1/v & -\frac{u}{v^2} \\ v & u \end{vmatrix} = \frac{2u}{v}.$$

Finalement, la formule de changement de variable (qui s'applique car la fonction 1 est positive) donne

$$\lambda_2(D) = \int_{]1/\sqrt{b},\sqrt{b}[\times]1/\sqrt{a},\sqrt{a}[} \frac{2u}{v} du\, dv$$

d'où par théorème de Fubini(-Tonelli)

$$\lambda_2(D) = \int_{1/\sqrt{a}}^{\sqrt{a}} \int_{1/\sqrt{b}}^{\sqrt{b}} \frac{2u}{v} du\, dv = 2\int_{1/\sqrt{b}}^{\sqrt{b}} u\, du \int_{1/\sqrt{a}}^{\sqrt{a}} \frac{1}{v} dv = \left(b - \frac{1}{b}\right)(\ln\sqrt{a} - \ln\frac{1}{\sqrt{a}}) = \frac{b^2-1}{b} \ln a.$$

2. Calculer $\int_D (x^2+y^2)dxdy$ où D est le domaine borné délimité par l'ellipse d'équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. *On posera $x = ar\cos\theta$ et $y = br\sin\theta$ où $r > 0$ et $\theta \in]0, 2\pi[$.*

L'application $(x, y) \mapsto (ax, by)$ est une bijection entre le disque ouvert de centre 0 et de rayon 1 et le domaine D. Par suite, en transformant les coordonnées polaires usuelles, l'application $\varphi : (r, \theta) \mapsto (ar\cos\theta, br\sin\theta)$ est une bijection entre $]0, 1[\times[0, 2\pi[$ et $D \setminus \{(0, 0)\}$ (le point $(0, 0)$ correspond à plusieurs angles, donc φ n'est pas bijective si on inclut $(0, 0)$). Pour avoir des domaines ouverts, on va même dire que φ est une bijection entre $]0, 1[\times]0, 2\pi[$ et $\widetilde{D} = D \setminus [(0, 0), (1, 0)]$ (D privé du segment entre 0 et $(1, 0)$). On note que $\lambda_2(\widetilde{D} \setminus D) = 0$ (aire d'un segment dans $\mathbb{R}^2$) donc les intégrales sur D et sur $\widetilde{D}$ sont égales.
φ est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme entre ces ouverts. En effet, φ est bijective, $\mathcal{C}^1$ et

$$\mathrm{J}_\varphi(r, \theta) = \begin{vmatrix} a\cos\theta & -ar\sin\theta \\ b\sin\theta & br\cos\theta \end{vmatrix} = abr$$

est non nul. Ainsi,

$$\begin{aligned}\int_D (x^2+y^2)dx\, dy = \int_{\widetilde{D}} (x^2+y^2)dx\, dy &= \int_{]0,1[\times]0,2\pi[} (a^2r^2\cos^2\theta + b^2r^2\sin^2\theta)abr\, dr\, d\theta \\ &= ab\int_0^1 r^3 dr \int_0^{2\pi} (a^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta)d\theta \\ &= \frac{ab}{4}\int_0^{2\pi} \left(a^2\frac{1+\cos 2\theta}{2} + b^2\frac{1-\cos 2\theta}{2}\right) d\theta = \frac{ab}{4}\frac{a^2+b^2}{2}2\pi = \frac{1}{4}(a^2+b^2)ab\pi.\end{aligned}$$

Exercice 6 – ***Convolution.*** Soit $f, g \in L^1(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$. Montrer que la fonction

$$f * g : x \mapsto f * g(x) = \int f(t)g(x-t)dt$$

est bien définie pour presque tout $x \in \mathbb{R}$, et appartient à L^1. Que vaut son intégrale ? Justifier que $f * g = g * f$.

Comme $f(t)g(x-t)$ est de signe quelconque, montrer que $f * g$ est bien définie pour presque tout x revient à montrer que la fonction $t \mapsto f(t)g(x-t)$ est intégrable ($\int |f(t)g(x-t)|dt < \infty$) pour presque tout x. Ceci sera une conséquence de la propriété plus forte suivante :

$$\int \left(\int |f(t)g(x-t)|dt\right) dx < \infty$$

(car si $h \geq 0$ et $\int h d\mu < \infty$ alors $h < \infty$ presque partout). Pour montrer cette propriété, utilisons le théorème de Fubini-Tonelli :

$$\begin{aligned}\int \left(\int |f(t)g(x-t)|dt\right) dx &= \int \left(\int |f(t)g(x-t)|dx\right) dt \\ &= \int |f(t)| \int |g(x-t)|dx\, dt \\ &= \int |f(t)| \int |g(y)|dy\, dt = \|f\|_1\|g\|_1 < \infty\end{aligned}$$

en faisant le changement de variable $y = x - t$ à la dernière ligne. C'est ce que l'on voulait.
Montrons que $f * g \in L^1$, c'est-à-dire $\int |f * g| < \infty$. Au passage, le fait que $f * g$ ne soit définie que presque partout n'est pas un problème pour écrire cette intégrale puisque sa valeur ne dépend pas de ce que vaut $f * g$ sur un ensemble négligeable. On a, pour tout x tel que $f * g(x)$ est bien défini,

$$|f * g(x)| = \left|\int f(t)g(x-t)dt\right| \leq \int \left|f(t)g(x-t)\right|dt,$$

et ceci vaut pour presque tout x donc

$$\|f*g\|_1 = \int |f*g(x)|dx \leq \int \left(\int |f(t)g(x-t)|dt \right) dx \leq \|f\|_1 \|g\|_1 < \infty$$

(en utilisant l'inégalité prouvée plus haut). Ainsi, $f*g \in L^1$ (là encore, comme les éléments de L^1 sont des classes de fonctions égales presque partout, peu importe le fait que $f*g(x)$ ne soit défini que pour presque tout x).
Le théorème de Fubini-Lebesgue s'applique à $(x,t) \mapsto f(t)g(x-t)$ (vu que $\iint |f(t)g(x-t)|dtdx < \infty$) et donc

$$\int f*g(x)dx = \int \int f(t)g(x-t)dtdx = \int f(t) \int g(x-t)dx\, dt = \int f(t) \int g(y)dy\, dx = \int f(t)dt \int g(y)dy.$$

Enfin, pour tout x tel que $f*g(x)$ est bien défini, en posant $u = x-t$ on a

$$\int |g(t)f(x-t)|dt = \int |f(u)g(x-u)|du < \infty$$

donc $g*f(x)$ est bien défini et, en posant $u = x-t$ (changement de variable justifié par la ligne qui précède),

$$g*f(x) = \int g(t)f(x-t)dt = \int f(u)g(x-u)du = f*g(x).$$

Dans $L^1(\mathbb{R})$, on a donc $g*f = f*g$ (en tant que « fonctions » définies presque partout).

Exercice 7 – *Lemme de Lebesgue.* Montrer que, pour toute $f \in L^1(\mathbb{R})$,

$$\int f(x)\sin(tx)dx \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Pour cela, on montrera d'abord cette propriété lorsque f est la fonction indicatrice d'un segment, et on utilisera la densité des fonctions en escalier dans $L^1(\mathbb{R})$.

Si $f = \mathbb{1}_{|a,b|}$ où $a < b$ et les barres sont chacune ou bien « [» ou bien «] », on a

$$\int f(x)\sin(tx)dx = \int_a^b \sin(tx)dx = \frac{\cos(ta)-\cos(tb)}{t} \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

(car le numérateur est compris entre -1 et 1).
Ensuite, si f est une fonction en escalier, il existe n intervalles $|a_i, b_i|$ et des réels α_i tels que

$$f = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbb{1}_{|a_i,b_i|}$$

(on pourrait en fait ne prendre que des segments $[a_i, b_i]$). Alors

$$\int f(x)\sin(tx)dx = \sum_{i=1}^n \alpha_i \int \mathbb{1}_{|a_i,b_i|}(x)\sin(tx)dx \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

car chaque terme de la somme finie converge vers 0.
Finalement, soit f une fonction intégrable. Soit $\varepsilon > 0$. Par densité des fonctions en escalier dans $L^1(\mathbb{R})$, il existe une fonction φ en escalier telle que $\|f-\varphi\|_1 < \varepsilon/2$. De plus, par ce que l'on vient de prouver, il existe $T > 0$ tel que, pour tout $t > T$,

$$\left| \int \varphi(x)\sin(tx)dx \right| < \varepsilon/2.$$

Alors, pour tout $t > T$, en commençant par utiliser l'inégalité triangulaire,

$$\begin{aligned}\left| \int f(x)\sin(tx)dx \right| &\leq \left| \int \big(f(x)-\varphi(x)\big)\sin(tx)dx \right| + \left| \int \varphi(x)\sin(tx)dx \right| \\ &\leq \int \big|f(x)-\varphi(x)\big||\sin(tx)|dx + \frac{\varepsilon}{2} \\ &\leq \int \big|f(x)-\varphi(x)\big|dx + \frac{\varepsilon}{2} = \|f-\varphi\|_1 + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.\end{aligned}$$

On a ainsi démontré que $\int f(x)\sin(tx)dx \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} 0$. (NB : tout ceci vaut pour $t \to +\infty$ et aussi $t \to -\infty$)