

DEVOIR MAISON N° 1

La qualité de la présentation et de la rédaction seront prises en considération. Notamment, toute réponse doit être rédigée et justifiée.

Exercice 1 – Météo. On considère une chaîne de Markov dont les états sont :

- $x_1 = (1, 1)$: il a plu hier et aujourd'hui
- $x_2 = (0, 1)$: il n'a pas plu hier et il a plu aujourd'hui
- $x_3 = (1, 0)$: il a plu hier et il n'a pas plu aujourd'hui
- $x_4 = (0, 0)$: il n'a plu ni hier ni aujourd'hui.

On sait par ailleurs (à partir d'observations) que :

- l'état x_1 implique qu'il pleuvra demain avec une probabilité égale à 0.7 ;
- l'état x_2 implique qu'il pleuvra demain avec une probabilité égale à 0.5 ;
- l'état x_3 implique qu'il pleuvra demain avec une probabilité égale à 0.4 ;
- l'état x_4 implique qu'il pleuvra demain avec une probabilité égale à 0.2.

1. Explicitez la matrice de transition P de la chaîne de Markov.
2. Comment a-t-on pu obtenir ces probabilités « à partir d'observations » ?
3. On suppose que X_0 est l'état du lundi et du mardi. Compléter la phrase suivante :

$P_{x_1}(X_2 = x_2)$ est la probabilité pour qu'il pleuve le _____ et qu'il ne pleuve pas le _____ sachant qu'il a plu le _____ et le _____ (de la même semaine)

4. Calculer $P_{x_1}(X_2 = x_1)$ et $P_{x_1}(X_2 = x_2)$ et en déduire la probabilité pour qu'il pleuve le jeudi sachant qu'il a plu le lundi et le mardi.
5. On suppose qu'il a plu lundi et mardi. En utilisant Matlab (par exemple) pour le calcul, donner la probabilité qu'il pleuve le mardi suivant, et la probabilité qu'il pleuve le mardi deux semaines après.

Exercice 2 – Météo (suite). On reprend l'énoncé de l'exercice 1.

1. Représenter le schéma et classer les états de la chaîne de Markov. Quelles sont leurs périodes ?
2. Déterminer les probabilités invariantes de cette chaîne.
3. Quelle est la proportion de journées de pluie (calculée sur une longue période de temps) ?
4. Un vendeur de parapluies constate que son chiffre d'affaires dépend de la météo du jour et de la veille : selon que l'on se trouve dans l'état x_1, x_2, x_3 ou x_4 , ses ventes sont de l'ordre de 80 €, 50 €, 30 € et 10 € respectivement. Quel est approximativement son chiffre d'affaire total sur une période de 365 jours ?
(On suppose 365 assez grand pour pouvoir appliquer les limites dans les théorèmes du cours, et on pourra définir une fonction $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ donnant les ventes ($f(x_1) = 80, \dots$) et poser $N = 365$ pour la lisibilité)
5. Question facultative mais recommandée. À l'aide de Matlab (par exemple), répondre à la question précédente en simulant la chaîne de Markov. Indication : pour passer de X_n à X_{n+1} , on pourra s'inspirer de :

```
U=rand();
if(X==3)
    if(U<0.4)
        X=2;
    else
        X=...
    end;
end;
```

end;

(On peut aussi utiliser la structure `switch X case ...`)