Devoir maison n° 1

À rendre pour le 14 novembre.

La qualité de la présentation et de la rédaction seront prises en considération. Notamment, toute réponse doit être rédigée et justifiée.

NB. Pour un événement A, on note $\mathbb{P}(A \,|\, \mathcal{G}) = \mathbb{E}[\mathbf{1}_A \,|\, \mathcal{G}]$, il s'agit de la probabilité conditionnelle sachant la tribu $\mathcal{G}$ (de même, $\mathbb{P}(A \,|\, X) = \mathbb{E}[\mathbf{1}_A \,|\, X]$).

Exercice 1 – *Autour de la définition.*
1. Rappeler la définition de l'espérance conditionnelle $\mathbb{E}[X \,|\, \mathcal{G}]$.
2. Justifier que $\mathbb{E}[X \,|\, Y]$ peut se définir ainsi : pour des variables aléatoires X,Y telles que X est intégrable ou positive, $\mathbb{E}[X \,|\, Y]$ est l'unique (à égalité p.s. près) variable aléatoire de la forme $f(Y)$ (où f est une fonction mesurable) telle que, pour toute fonction mesurable positive bornée g,

$$\mathbb{E}[Xg(Y)] = \mathbb{E}[f(Y)g(Y)].$$

(Par le cours, rappeler la définition de la tribu $\sigma(Y)$ (tribu engendrée par Y), et quelles sont les variables aléatoires mesurables pour cette tribu)
3. À l'aide de cette définition, démontrer (ou redémontrer) les propriétés suivantes : pour une variable aléatoire réelle X intégrable, et une variable aléatoire Y à valeurs dans $(E,\mathcal{E})$,

a) Si X est indépendante de Y, $\mathbb{E}[X \,|\, Y] = \mathbb{E}[X]$ p.s.
b) Pour toute fonction f (telle que $Xf(Y)$ est intégrable), $\mathbb{E}[Xf(Y) \,|\, Y] = f(Y)\mathbb{E}[X \,|\, Y]$ p.s.
c) Si X est indépendante de Y, pour toute fonction $f : \mathbb{R} \times E \to \mathbb{R}$, $\mathbb{E}[f(X,Y) \,|\, Y] = \varphi(Y)$ p.s., où $\varphi(y) = \mathbb{E}[f(X,y)]$ pour tout y.
$\to$ *"Si X est indépendante de Y, l'espérance conditionnelle sachant Y s'obtient en intégrant X, avec Y fixé"*

(Indication : il faut vérifier que les v.a. sont de la forme "$f(Y)$" et satisfont la formule de la question 2...)
4. À l'aide des propriétés précédentes (on pourra aussi utiliser d'autres propriétés du cours : linéarité de l'espérance conditionnelle, ou théorème de convergence monotone pour l'espérance conditionnelle, par exemple), calculer les espérances conditionnelles suivantes, où X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes, de loi uniforme sur $[0,1]$ (il est important de bien justifier chaque étape des calculs) :

$$\mathbb{E}[XY \,|\, X],\ \mathbb{E}[X - XY^2 \,|\, Y],\ \mathbb{E}\Big[\frac{1}{1-XY}\,\Big|\, X\Big],\ \mathbb{E}\Big[\frac{1}{1-XY}\,\Big|\, X,Y\Big],\ \mathbb{P}(X < Y \,|\, Y)$$

Pour la 3e espérance, on fera le calcul de deux façons : 1. en développant en série entière, et 2. en utilisant c). Dans la 4e espérance, $\mathbb{E}[\cdot \,|\, X,Y]$ est l'espérance conditionnelle sachant la variable aléatoire (X,Y).

Lois discrètes

Exercice 2. Soit X,Y des variables aléatoires indépendantes, de loi de Poisson de paramètres λ et μ.
1. Calculer la loi de $Z = X + Y$.
2. Calculer la loi de X sachant Z. Vérifier que c'est une loi binomiale et donner ses paramètres.
3. En déduire sans calcul $\mathbb{E}[X|X + Y]$.

Exercice 3. Soit N un entier ≥ 1, et $x \in \{1,\dots,N-1\}$. On considère une chaîne de Markov $(X_n)_{n\geq 0}$ à valeurs dans $\{0,\dots,N\}$, où $X_0 = x$ et, pour tout $n \geq 0$, la loi de X_{n+1} sachant X_n est la loi binomiale de paramètres N et $\frac{1}{N}X_n$.
1. Expliciter les probabilités de transition.
2. Que vaut $\mathbb{E}_x[X_{n+1} \,|\, X_n]$? En déduire la valeur de $\mathbb{E}_x[X_n]$ pour tout n.
3. Classer les états. En déduire que $(X_n)_{n\geq 0}$ admet une limite W p.s., à valeurs dans $\{0,N\}$.
4. Calculer $\mathbb{E}_x[W]$ grâce à la question 2, et en déduire la loi de W sous $\mathbb{P}_x$.

Lois à densité

Exercice 4. Soit (X,Y) un couple de variables aléatoires de densité

$$f(x,y) = \frac{1}{\pi} e^{-(1+x^2)y} \mathbf{1}_{\{y>0\}}.$$

1. Calculer la densité de Y puis la densité conditionnelle de X sachant $Y = y$ (on pourra reconnaître une loi classique, ce qui pourra servir ensuite).
2. En déduire $\mathbb{E}[X \mid Y]$, $\mathbb{E}[X^2 \mid Y]$ et ensuite $\mathbb{E}[X^2 Y]$.
3. Calculer la densité de X puis la densité conditionnelle de Y sachant $X = x$. Quelle est la loi de Y sachant X ?

Propriété de Markov forte

Exercice 5 – ***Temps d'atteinte de 0 pour la marche aléatoire sur*** $\mathbb{N}$**.** Soit $p \in [0,\frac{1}{2}]$. On considère une chaîne de Markov $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur $\mathbb{N}$, de matrice de transition P donnée par $P(n,n+1) = p = 1 - P(n,n-1)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, et $P(0,1) = 1$, et on s'intéresse aux temps d'atteinte (ou de retour)

$$T_x = \inf\{n \geq 1 \mid X_n = x\}, \qquad x \in \mathbb{N}.$$

On rappelle que la chaîne est récurrente pour $p \leq 1/2$ (d'où $T_x < \infty$ p.s.) et récurrente positive si $p < 1/2$.
1. Justifier que, pour tout $x \in \mathbb{N}$, T_x est un temps d'arrêt pour la filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$, où $\mathcal{F}_n = \sigma(X_0, \ldots, X_n)$.
2. Par la propriété de Markov faible (au temps 1), exprimer $\mathbb{E}_0[T_0]$ en fonction de $\mathbb{E}_1[T_0]$.
3. Par la propriété de Markov faible (au temps 1), exprimer $\mathbb{E}_1[T_0]$ en fonction de $\mathbb{E}_2[T_0]$.
4. Par la propriété de Markov forte (au temps T_1), exprimer $\mathbb{E}_2[T_0]$ en fonction de $\mathbb{E}_2[T_1]$ et $\mathbb{E}_1[T_0]$.
5. Justifier que $\mathbb{E}_2[T_1] = \mathbb{E}_1[T_0]$.
6. En déduire que, si $p = 1/2$, $\mathbb{E}_1[T_0] = \infty$, puis $\mathbb{E}_0[T_0] = \infty$: on retrouve le fait que ce cas est récurrent nul.
7. Si $p < 1/2$, on a vu en TD que $\mathbb{E}_0[T_0] < \infty$. Déduire de ce qui précède la valeur de $\mathbb{E}_1[T_0]$ puis de $\mathbb{E}_0[T_0]$.

Exercices en option

Exercice 6. Soit X,Y,Z trois variables aléatoires indépendantes, de loi uniforme dans $[0,1]$.
1. Justifier que $\mathbb{P}(Z \in [X,Y]) = \frac{1}{3}$ (ici, $[X,Y]$ est le segment entre X et Y, quel que soit l'ordre entre X et Y) par un argument de symétrie entre X, Y et Z.
2. Calculer $\mathbb{P}\big(Z \in [X,Y] \,\big|\, X,Y\big)$. *Penser à la propriété c) de l'exercice 1.*
3. En déduire $\mathbb{E}\big[|X - Y|\big]$.
4. Écrire l'espérance précédente comme une intégrale double (on ne demande pas de la recalculer).

Exercice 7. Soit $\lambda > 0$. Soit X,Y des variables aléatoires telles que X suit la loi de densité $x \mapsto \lambda^2 x e^{-\lambda x} \mathbf{1}_{[0,\infty[}(x)$, et que la loi conditionnelle de Y sachant X est la loi uniforme sur $[0,X]$.
1. Quelle est la densité de (X,Y) ?
2. Quelle est la loi de Y ?
3. Quelle est la loi de X sachant Y ?
4. Calculer $\mathbb{E}[Y^2 \mid X]$.