Université Paris 13, Institut Galilée
Année universitaire 2019–2020

MACS 2 & M1 – Probabilités

Examen partiel du 15 novembre 2019

Durée : 3 heures

Aucun appareil électronique n'est autorisé.
Le seul document autorisé est une feuille A4 de notes manuscrites, personnelle.
La qualité de la présentation et de la rédaction seront prises en considération.

Exercice 1. On considère une chaîne de Markov $(X_n)_{n\geq 0}$ d'espace d'états $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ et de matrice de transition donnée ci-dessous :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/4 & 1/4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 0 & 0 & 0 & 3/4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/3 & 2/3 & 0 & 0 \\ 1/4 & 0 & 0 & 1/2 & 1/4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/3 & 2/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

1. Représenter le graphe de cette chaîne de Markov.
2. Calculer $a = \mathbb{P}_1(X_1 = 4,\, X_2 = 4)$, $b = \mathbb{P}_1(X_3 = 5)$, $c = \mathbb{P}_1(X_7 = 4 | X_2 = 4,\, X_6 = 5)$, $d = \mathbb{P}_1(X_2 = 4 \,|\, X_3 = 5)$.
3. Déterminer les classes de communication et les mettre en évidence sur le schéma, puis donner la nature des états, c'est-à-dire, s'ils sont récurrents ou transients. *Ne pas justifier les classes, mais justifier leur nature.*
4. Calculer, pour chaque classe récurrente, les probabilités d'absorption par cette classe selon l'état initial de la chaîne de Markov.
5. On suppose que $X_0 = 4$ p.s.. Justifier que X est alors une chaîne de Markov *irréductible* sur un espace d'états $\widetilde{E} \subset E$ à préciser, et donner sa matrice de transition $\widetilde{P}$. Calculer sa probabilité invariante, et sa période.
6. Si $X_0 = 4$ p.s., que peut-on dire de la convergence de $\displaystyle\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{1}_{\{X_k=1\}}$ quand $n \to \infty$? de $\displaystyle\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} X_k$? Que peut-on dire de $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}_4(X_n = 5)$ et $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}_4(X_n = 2)$? *On précisera les hypothèses utilisées.*

Exercice 2 – *Mesure réversible.* Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une chaîne de Markov sur l'espace d'état $E = \{1, \ldots, N\}$. On note P sa matrice de transition, supposée irréductible et apériodique. On appelle *mesure réversible* une mesure de probabilité π sur E satisfaisant :

$$\forall x, y \in E, \qquad \pi(x)P(x, y) = \pi(y)P(y, x).$$

1. Montrer que si π est une mesure réversible, alors c'est une mesure invariante de la chaîne de Markov.
2. Montrer que s'il existe $x, y \in E$ tels que $P(x, y) = 0$ et $P(y, x) > 0$, alors il n'existe pas de mesure réversible. *Que peut-on dire de $\pi(y)$? Conclure grâce à cela.*
On suppose maintenant que $(X_n)_{n\geq 0}$ admet une mesure réversible π.
3. Soit $n > 1$. Montrer que sous la loi $\mathbb{P}_\pi$, la chaîne Y définie par $Y_0 = X_n, Y_1 = X_{n-1}, \ldots Y_n = X_0$ est une chaîne de Markov de longueur n. On précisera sa matrice de transition. *On pourra commencer par calculer $\mathbb{P}_\pi(Y_0 = y_0, \ldots, Y_n = y_n)$ pour $y_0, \ldots, y_n \in E$, et on utilisera la définition de la réversibilité.*

Exercice 3 – ***Urne d'Ehrenfest.*** On considère l'expérience suivante : N molécules de gaz sont distribuées dans deux récipients A et B, reliés par une ouverture de très petite taille. On la modélise par une chaîne de Markov $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$, où X_n est le nombre de molécules présentes en A après que n molécules ont traversé l'ouverture dans un sens ou l'autre, en supposant que la molécule qui traverse est choisie uniformément parmi les N molécules présentes. NB. Pour un récipient ayant un volume d'un litre, N est de l'ordre de 10^{22}.

1. Expliciter la matrice de transition P de cette chaîne de Markov. Classer ses états.

2. En déduire que, presque sûrement, quelle que soit la configuration initiale, après un temps fini toutes les molécules vont être en B. Notre modèle paraît-il réaliste ?

3. Démontrer que la loi binomiale de paramètres N et $1/2$ est réversible (cf. exercice précédent), c'est à dire qu'elle satisfait $\pi(k)P(k,l) = \pi(l)P(l,k)$ pour tout $0 \leq k,l \leq N$. On admettra que la loi binomiale est alors invariante.

4. Si, initialement, toutes les molécules sont en B, quel est le temps moyen avant que ceci se produise à nouveau ? En déduire une minoration (simple) du temps moyen pour que le compartiment A se vide si initialement les compartiments contiennent chacun autant de molécules.

Exercice 4 – ***Marche aléatoire perturbée sur*** $\mathbb{N}$. On considère la chaîne de Markov $(X_n)_{n\geq 0}$ d'espace d'états $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$ et dont les probabilités de transition vérifient, pour tout $x \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{P}(X_1 = x+1 \,|\, X_0 = x) = p_x, \qquad \text{et} \qquad \mathbb{P}(X_1 = x-1 \,|\, X_0 = x) = 1 - p_x,$$

où $(p_x)_{x\in\mathbb{N}^*}$ sont des réels dans $[0,1]$, et $p_0 = 1$ (c'est-à-dire que $\mathbb{P}(X_1 = 1 \,|\, X_0 = 0) = 1$). On pose $q_x = 1 - p_x$. Le cas $p_x \equiv 1/2$ est la marche aléatoire simple. On étudie le comportement de ce système lorsque l'on perturbe ces probabilités de transition en certains états x.

1. À quelle condition (sur $(p_x)_{x\in\mathbb{N}}$) cette chaîne de Markov est-elle irréductible ? On suppose cette condition vérifiée. Quelle est la période ?

2. Écrire les équations vérifiées par une mesure invariante μ, en déduire en fonction de $\mu(0)$ (et $(p_x)_{x\in\mathbb{N}}$) les valeurs de $\mu(1)$, $\mu(2)$, $\mu(3)$ et finalement $\mu(n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3. En déduire que la chaîne de Markov est récurrente positive si, et seulement si $\displaystyle\sum_{x=1}^{\infty} \frac{p_1 \cdots p_{x-1}}{q_1 \cdots q_{x-1}} \frac{1}{q_x} < \infty$.

4. *Exemple :* on considère le cas où $p_0 = 1$, $p_x = 1/2$ pour tout $x \in \mathbb{N}^* \setminus S$ et $p_x = 1/4$ si $x \in S$, où $S = \{2^n \,|\, n \in \mathbb{N}\}$. La chaîne de Markov est-elle récurrente positive ? *Remarquer que le quotient* $\frac{p_1 \cdots p_x}{q_1 \cdots q_x}$ *garde la même valeur (laquelle ?) pour* x *entre* $2^k + 1$ *et* 2^{k+1}. Même question si $S = \{3^n \,|\, n \in \mathbb{N}\}$.