

Examen partiel du 17 janvier 2020

Durée : 3 heures

Aucun appareil électronique n'est autorisé.
Le seul document autorisé est une feuille A4 de notes manuscrites, personnelle.
La qualité de la présentation et de la rédaction seront prises en considération.

Exercice 1. Soit $x \in \mathbb{N}$. Soit $M = (M_n)_{n\geq 0}$ une martingale par rapport à une filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$ telle que

a) $M_0 = x$,

b) pour tout $n \geq 0$, $M_n \in \mathbb{N}$ p.s.,

c) $M_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ p.s., et

d) pour tout $n \geq 0$, $M_{n+1} \leq M_n + 1$ p.s.

On s'intéresse à la variable aléatoire $Z = \sup_{n\in\mathbb{N}} M_n$.

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on définit $T_k = \inf\{n \geq 0 \,|\, M_n = k\}$.

1. Soit $k \geq x$.

1.a) Justifier que $Z < \infty$ p.s., et que $Z \geq k$ si, et seulement si $T_k < \infty$. *(Bien préciser les hypothèses utilisées)*

1.b) Montrer que T_k est un temps d'arrêt pour $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$.

1.c) Déterminer la valeur, pour tout n, de $\mathbb{E}[M_{n\wedge T_k}]$, puis justifier que $(M_{n\wedge T_k})_n$ converge p.s. vers une limite (aléatoire) W à préciser *(on pourra distinguer selon $T_k < \infty$ ou non)*, et en déduire $\mathbb{E}[W]$.

1.d) En exprimant différemment $\mathbb{E}[W]$, en déduire la valeur de $\mathbb{P}(T_k < \infty)$.

2. En déduire, pour tout $k \geq x$, $\mathbb{P}(Z \geq k)$ puis $\mathbb{P}(Z = k)$.

3. Que vaut $\mathbb{E}[Z]$? Pour $x = 1$, calculer aussi $\mathbb{E}[\frac{1}{Z}]$.

Exercice 2. Soit $\lambda > 0$. Soit X, Y deux variables aléatoires indépendantes, de loi exponentielle de paramètre λ. On pose $Z = X + Y$.

1. Calculer la densité de (X, Z).

2. En déduire la densité de Z.

3. En déduire la loi conditionnelle de X sachant Z.

4. Calculer $\mathbb{E}[X \,|\, Z]$ et $\mathbb{E}[X^2 \,|\, Z]$.

Exercice 3. Soit $(Y_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées de loi $\mathcal{N}(0, 1)$. On définit la suite $(X_n)_{n\geq 0}$ par $X_0 = 1$ et

$$\forall n \geq 0, \quad X_{n+1} = \frac{X_n}{2} + Y_{n+1}.$$

1. Justifier soigneusement que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(X_0, \dots X_n)$ est un vecteur gaussien.

2. On va étudier le vecteur gaussien (X_1, X_2, X_3).

2.a) Déterminer le vecteur des moyennes M et la matrice de covariance Γ de (X_1, X_2, X_3).

2.b) Calculer $\mathbb{E}[X_1 \,|\, X_2, X_3]$. *On pourra éventuellement poser $\widetilde{X}_1 = X_1 - \mathbb{E}[X_1]$ pour se ramener au cas centré.*

2.c) Quelle est la loi conditionnelle de X_1 sachant (X_2, X_3) ?

3. On va étudier la limite de X_n quand $n \to \infty$.

3.a) Déterminer des équations récursives satisfaites par $m_n = \mathbb{E}(X_n)$ et $\sigma_n^2 = \mathbb{V}\mathrm{ar}(X_n)$

3.b) Résoudre ces équations, et en déduire la valeur de $m_\infty = \lim_{n\to\infty} m_n$ et $\sigma_\infty^2 = \lim_{n\to\infty} \sigma_n^2$.

3.c) Conclure sur la convergence en loi de la suite (X_n).

3.d) Calculer, pour $n \in \mathbb{N}$ la covariance de X_n et X_{n+1}. En déduire la loi de $X_n - X_{n+1}$. Conclure que (X_n) ne converge pas presque sûrement.

4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $M_n = 2^{-n} \exp\left(\frac{3}{8} X_n^2\right)$.

4.a) En utilisant la formule de la densité de la gaussienne, vérifier que $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} e^{ax-bx^2}\mathrm{d}x = \sqrt{\frac{\pi}{b}}e^{a^2/4b}$.
4.b) Montrer que $(M_n)_{n\geq 0}$ est une martingale positive pour la filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$ définie par $\mathcal{F}_n = \sigma(X_0,\ldots,X_n)$ (on prêtera une attention particulière à justifier toutes les propriétés de cette martingale).
4.c) En déduire que cette martingale converge presque sûrement. Grâce à la question 3 montrer que la limite est nulle.

Exercice 4. Soit $\lambda \in]1/2,1[$. On considère la chaîne de Markov (X_n) sur $\mathbb{Z}$ de matrice de transition donnée par

$$P_{0,1} = P_{0,-1} = P_{0,0} = 1/3 \quad \text{et} \quad P_{x,x+1} = 1 - P_{x,x-1} = \begin{cases} \lambda & \text{si } x > 0 \\ 1-\lambda & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

1. Déterminer les classes de communication et la période de cette chaîne de Markov.
2. On cherche une fonction ϕ croissante bornée telle que $(\phi(X_n))_{n\geq 0}$ est une martingale pour la filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$ donnée par $\mathcal{F}_n = \sigma(X_0,\ldots,X_n)$. Soit $\phi : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ une telle fonction.
2.a) Montrer que pour tout $x > 0$, on a

$$\phi(x) = (1-\lambda)\phi(x-1) + \lambda\phi(x+1).$$

2.b) En déduire la valeur de $\phi(x)$ en fonction de $\phi(0)$ et $\phi(1)$. On pourra commencer par calculer $\phi(x+1)-\phi(x)$.
2.c) On suppose $\phi(0) = 1/2$ et $\lim_{x\to\infty}\phi(x) = 1$. Déterminer $\phi(x)$ pour $x > 0$.
2.d) En utilisant que $2\phi(0) = \phi(1) + \phi(-1)$, puis un raisonnement similaire aux questions précédentes pour $x < 0$ donner la valeur de $\phi(x)$ pour $x < 0$. Conclure sur l'existence d'une fonction ϕ ayant les propriétés citées.
2.e) Vérifier que $\lim_{x\to-\infty}\phi(x) = 0$.
3. On supposera dans les questions suivantes donnée une fonction ϕ croissante à valeurs dans $[0,1]$ telle que $(\phi(X_n))_{n\geq 0}$ est une martingale, et $\lim_{x\to\infty}\phi(x) = 1$, $\lim_{x\to-\infty}\phi(x) = 0$.
3.a) Pour tout $a \in \mathbb{Z}$, on pose $T_a = \inf\{n \geq 0 : X_n = a\}$. Montrer que $T_a \wedge T_0$ est un temps d'arrêt de la chaîne de Markov qui est fini $\mathbb{P}_x$-presque sûrement, pour tout $x \in [0,a]$.
3.b) En déduire que $\phi(X_{n\wedge T_a\wedge T_0})$ converge p.s. et dans L^1 vers sa limite.
3.c) En justifiant l'égalité $\phi(x) = \mathbb{E}_x(\phi(X_{T_a\wedge T_0}))$, déterminer $\mathbb{P}_x(T_a < T_0)$ pour tout $x \in [0,a]\cap\mathbb{Z}$.
3.d) En déduire que $\lim_{a\to\infty}\mathbb{P}_1(T_a < T_0) = 2\phi(1) - 1 > 0$. Conclure que (X_n) est transiente.
4. On pourra admettre le résultat obtenu plus haut : (X_n) est transiente.
4.a) En étudiant les limites de la martingale $(\phi(X_n))$, montrer que, presque sûrement, $\lim X_n = +\infty$ ou $\lim X_n = -\infty$.
4.b) Montrer que $\mathbb{P}_x(\lim X_n = \infty) = \phi(x)$ pour tout $x \in \mathbb{Z}$.