Devoir maison II

Exercice 1. Ça y est : l'apocalypse zombie est arrivée. Vous êtes à la tête d'un village de N personnes, entouré par N zombies qui cherchent à vous infecter. Les barrières que vous avez installées pour vous protéger vont céder dans peu de temps. C'est une catastrophe puisque la morsure de zombie est extrêmement contagieuse, et transforme une personne saine en zombie en un instant. Heureusement, les scientifiques de votre village ont bien travaillé, et ont trouvé un antidote, qui permet de retransformer instantanément un zombie en être humain sain.
Quand les barrières tomberont, tous les membres de votre village s'équiperont de l'antidote, et tenteront de retransformer en humains les zombies, tandis que ceux-ci chercheront à contaminer tous les humains restants. On note X_n le nombre d'humains sains à l'instant n, et on suppose qu'à chaque instant, un invididu (humain ou zombie) est tiré au hasard parmi les $2N$ individus présents. Si un zombie est choisi, ce zombie attaque immédiatement un humain sain, et le transforme en zombie ($X_{n+1} = X_n - 1$). Si un humain sain est choisi, il arrive à donner l'antidote au zombie et le retransformer en humain sain ($X_{n+1} = X_n + 1$).
1. Montrer que $(X_n; n \geq 0)$ est une chaîne de Markov, dont on donnera la matrice de transition et le graphe.
2. Déterminer les états récurrents et transients de cette chaine de Markov.
3. Déterminer la probabilité d'absoption de cette chaine de Markov partant de $X_0 = N$ (on utilisera les symétries du problème).
4. Montrer que la probabilité d'absorption par l'état $2N$ de cette chaine de Markov est donnée par

$$q(x) = \sum_{j=1}^{x} \frac{1}{(2N-j)!}\binom{2N-1}{j-1} \Big/ \sum_{j=1}^{2N} \frac{1}{(2N-j)!}\binom{2N-1}{j-1}$$

5. En déduire l'espérance du nombre final X_∞ d'individus sains après la guerre des zombies, en fonction de leur nombre initial x. Tracer cette fonction à l'aide d'un ordinateur pour $N = 10000$ et reproduisez l'allure du graphe sur votre copie.

Vous décidez d'agir pour augmenter les chances de survies de votre village (et donc les vôtres). Vous êtes un maître sniper, capable d'abattre n'importe quel nombre de zombies dès que vous le décidez. Il vous serait donc facile de tuer immédiatement les N zombies, et donc de sauver vos N compatriotes, mais vous hésitez : après tout, si vous réussissez à retransformer les zombies en humains, vous serez à la tête d'une bien plus grande ville, et donc un personnage bien plus important. Vous allez donc essayer de déterminer une méthode qui vous permettra de sauver, en moyenne, le plus grand nombre d'humains possible.
On supposera dans les questions qui suivent que vous appliquez la technique A suivante : à chaque étape, s'il y a au moins autant de zombies que d'humains, vous tuez le nombre de zombies nécessaires pour que le nombre de zombies devienne égal au nombre d'humains moins 1 ; puis, comme précédemment, un individu est choisi au hasard et contamine/soigne un individu du type opposé. On notera X_n^A le nombre d'humains à chaque étape, et Z_n^A le nombre de zombies.
6. Montrer que $(X_n^A, Z_n^A)_{n\geq 0}$ est une chaîne de Markov, et déterminer les états récurrents.
7. Pour tout x et z, on note $V(x,z) = \mathbb{E}_{x,z}(X_\infty^A)$ le nombre moyen d'humains vivants à la fin du processus.
7.a) Montrez que $V(x, 0) = x$.
7.b) Expliquez pourquoi, lorsque $z \geq x$, on a $V(x,z) = V(x,z-1) = V(x,x-1)$.
7.c) Prouvez que pour tout $z < x$, on a $V(x,z) = \frac{x}{x+z}V(x+1,z-1) + \frac{z}{z+x}V(x-1,z+1)$
8. Déduire des deux égalités précédentes que $(V(X_n^A, Z_n^A))_{n\geq 0}$ est une martingale, et déterminez sa limite.
Grâce aux égalités

$$V(x,0) = x, \quad V(x,z) = V(x,x-1) \text{ si } z \geq x \quad \text{ et } \quad V(x,z) = \frac{x}{x+z}V(x+1,z-1) + \frac{z}{z+x}V(x-1,z+1) \text{ si } z < x,$$

il est possible de calculer la valeur de $V(x,z)$ pour tout $x, z \in \mathbb{N}$. On admettra ici que ce calcul montre en particulier que, quels que soit $x, z \in \mathbb{N}$, on a

$$V(x,z) \geq V(x,z-1) \quad \text{ et } \quad V(x,z) \geq \frac{x}{x+z}V(x+1,z-1) + \frac{z}{z+x}V(x-1,z+1).$$

On va maintenant montrer que la technique A est optimale. Pour ce faire, on suppose que vous employez une technique B quelconque pour contrôler la population de zombies : à chaque étape, en fonction du nombre de

zombies et d'humains, vous tuez un certain nombre de zombies puis, comme avant, un individu est choisi au hasard et contamine/soigne un individu du type opposé. On note Z_n^B et X_n^B le nombre de zombies et d'humains restant à chaque étape avec cette technique.
9. Montrer, en justifiant soigneusement, que, pour tout x, z, on a $\mathbb{E}_{x,z}(V(X_1^B, Z_1^B)) \leq V(x,z)$. On pourra utiliser la variable aléatoire $Y_{x,z}^B$ représentant le nombre de zombies tués à l'instant 0 selon la technique B, si on a x humains et z zombies.
10. En déduire que $(V(X_n^B, Z_n^B); n \geq 0)$ est une sur-martingale, et en déduire une majoration de $\mathbb{E}_{x,z}(X_\infty^B)$.
11. Conclure que la stratégie A est meilleure que la stratégie B.

On se demande maintenant combien de zombies en moyenne seront tués à cause de l'application de la stratégie A.
12. Faites un programme simulant l'évolution au cours du temps du nombre de zombies et d'humains en appliquant la stratégie A. Grâce à la méthode de Monte-Carlo, déterminez combien de zombies mourront si $N = 100$? Si $N = 1000$? Si $N = 10000$?
13. $(\star)$ Pour $k \in \mathbb{N}$, on note $v_k = V(k,k)$. Montrez alors que pour tout $c \leq k$, on a

$$V(k+c, k-c) = v_k + (2k - v_k)2^{-(2k-2)} \sum_{j=k}^{k+c-1} \binom{2k-1}{j}$$

14. $(\star)$ En utilisant que $V(k, k+1) = V(k,k) = v_k$, montrez également que

$$V(k+c, k+1-c) = v_k + (2k+1-v_k) \left(2^{(2k-1)} + \frac{1}{2}\binom{2k}{k} \right)^{-1} \sum_{j=k}^{k+c-1} \binom{2k-1}{j}.$$

15. $(\star)$ En utilisant alors que $v_{k+1} = V(k+1, k+1) = V(k+1, k)$, en déduire la formule de récurrence suivante sur v_k :

$$v_{k+1} = \frac{1-p_k}{1+p_k} v_k + \frac{2p_k}{1+p_k}(2k+1),$$

où $p_k = 2^{-2k}\binom{2k}{k}$.
16. Grâce à la formule de Stirling, déterminer un équivalent de p_k lorsque $k \to \infty$.
17. $(\star\star\star)$ En déduire que

$$v_k = 2k - \sqrt{\pi k} + \frac{\pi}{4} + o(1) \text{ lorsque } k \to \infty.$$

Exercice 2. Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes, de loi donnée par :

$$\mathbb{P}(X_n = 1) = \mathbb{P}(X_n = -1) = \frac{1}{2}.$$

On pose $S_0 = 0$ et, pour tout $n \geq 1$, $S_n = X_1 + \cdots + X_n$. On définit la filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$ par $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$ et, pour tout $n \geq 1$, $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, \ldots, X_n)$. Soit $\theta > 0$. On définit $\varphi(\theta) = \mathbb{E}[e^{\theta X_1}]$ et $\psi(\theta) = \ln \varphi(\theta)$, puis

$$M_n = e^{\theta S_n - n\psi(\theta)}.$$

On veut étudier la loi de

$$T_1 = \inf\{n \geq 1 \,|\, S_n = 1\}.$$

1. Montrer que $(M_n)_{n\geq 0}$ est une martingale pour la filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$.
2. Justifier que $\psi(\theta) \geq 0$. *On pourra expliciter la valeur de* $\varphi(\theta)$.
3. Montrer que T_1 est un temps d'arrêt pour la filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$.
4. Montrer que $(S_n)_n$ est une martingale et en déduire que $S_{n\wedge T_1}$ admet presque sûrement une limite quand $n \to \infty$. En déduire que $T_1 < \infty$ presque sûrement.
5. Montrer que, pour tout n, $\mathbb{E}[M_{n\wedge T_1}] = 1$.
6. Montrer que $\mathbb{E}[M_{T_1}] = 1$. Réécrire cette identité sous une forme plus simple (avec la valeur de S_{T_1}).
7. Soit $s \in]0,1[$. Déterminer $\theta > 0$ tel que $\varphi(\theta) = \frac{1}{s}$ et en déduire une formule explicite pour la fonction génératrice $\mathbb{E}[s^{T_1}]$.