Université Paris 13, Institut Galilée
Année universitaire 2020–2021

MACS 2 & M1 – Probabilités

Partiel du 15 janvier 2021

Durée : 3 heures

La qualité de la présentation et de la rédaction seront prises en considération.

On rappelle la notation $x \wedge y = \min(x, y)$.

Exercice 1. Soit (X, Y, Z) un vecteur gaussien centré de $\mathbb{R}^3$ tel que $\mathrm{Var}(X) = 1$ et $\mathrm{Var}(Y) = \mathrm{Var}(Z) = 2$. On suppose que $\mathrm{Cov}(X, Z) = 1$, que Y est indépendant de Z et que $X + Z$ est indépendant de $X + 2Y$.
1. Déterminer la matrice de covariance Γ de (X, Y, Z).
2. La matrice Γ est-elle inversible ? Le triplet (X, Y, Z) a-t-il une densité par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^3$?
3. Trouver une relation linéaire non-triviale entre X, Y et Z.
4. Déterminer la densité du couple (X, Y).

Exercice 2. Soit $a \in \mathbb{N}^*$. Soit $\lambda \in]0, \frac{\pi}{2a}[$. Soit $(Z_n)_{n\geq 0}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, de loi $\mathbb{P}(Z_n = 1) = \mathbb{P}(Z_n = -1) = \frac{1}{2}$. On définit $\mathcal{F}_n = \sigma(Z_1, \ldots, Z_n)$ pour tout n, et $S_n = Z_1 + \cdots + Z_n$. On pose, pour tout n,

$$X_n = \frac{\cos(\lambda S_n)}{(\cos \lambda)^n}.$$

Enfin, on note $T = \inf\{n \geq 0 \,|\, |S_n| = a\}$.
1. Expliquer pourquoi $T < \infty$ p.s..
2. Montrer que $(X_n)_n$ est une martingale par rapport à $(\mathcal{F}_n)_n$.
On pourra utiliser $\cos(a + b) + \cos(a - b) = 2 \cos a \cos b$ *pour* $a, b \in \mathbb{R}$ *(ou un calcul sur des nombres complexes).*
3. Donner (en justifiant) la valeur de $\mathbb{E}[X_{n\wedge T}]$ pour tout n.
4. Justifier les inégalités suivantes :

$$0 \leq \frac{\cos(\lambda a)}{(\cos \lambda)^{n\wedge T}} \leq X_{n\wedge T} \leq \frac{1}{(\cos \lambda)^T}.$$

5. Déduire de ce qui précède, par un passage à la limite à justifier, que $\mathbb{E}[\frac{\cos(\lambda a)}{(\cos \lambda)^T}] \leq 1$.
6. En déduire, par un passage à la limite à justifier, la valeur de $\mathbb{E}[X_T]$, puis de $\mathbb{E}[(\cos \lambda)^{-T}]$.

Exercice 3. On pose (X, Y) une paire de variables aléatoires sur $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, dont la loi jointe est donnée, pour tous $k \in \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{N}$ par

$$\mathbb{P}(X = k, Y = n) = \alpha \frac{2^n}{(n + 1)!} \mathbf{1}_{\{0\leq k\leq n\}}.$$

1. Déterminer la valeur de α.
2. Déterminer la loi de Y.
3. Déterminer la loi de X conditionellement à Y. En déduire la valeur de $\mathbb{E}(X)$.

Exercice 4. Soit $(X_n)_n$ une chaîne de Markov *irréductible* sur un espace d'états E (infini), de matrice P. On suppose qu'il existe un ensemble $A \subset E$ et une fonction $f : E \to [0, +\infty[$ tels que

(i) pour tout $x \in E \setminus A$, $\quad (Pf)(x) \leq f(x)$, où $(Pf)(x) = \sum_{y \in E} P(x,y) f(y)$;

(ii) il existe $z \in E \setminus A$ tel que $f(z) < \inf_{x \in A} f(x)$.

L'objectif est de montrer que $(X_n)_n$ est transiente.
On définit, pour tout $n \geq 0$, la tribu $\mathcal{F}_n = \sigma(X_0, \ldots, X_n)$. On définit le temps $T_A = \inf\{n \geq 0 \,|\, X_n \in A\}$.
1. Justifier que T_A est un temps d'arrêt pour la filtration $(\mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$.
2. Rappeler comment on peut écrire $(Pf)(x)$ sous la forme d'une espérance (avec la chaîne de Markov X).
Soit $x \in E$.
3. Montrons que le processus $(Z_n)_{n \geq 0} = (f(X_{n \wedge T_A}))_{n \geq 0}$ est une surmartingale positive sous $\mathbb{P}_x$ pour la filtration $(\mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$.
3.a) Justifier que, pour tout n, $\mathbb{E}_x[f(X_{(n+1) \wedge T_A})\mathbf{1}_{\{T_A \leq n\}} \,|\, \mathcal{F}_n] = f(X_{T_A})\mathbf{1}_{\{T_A \leq n\}}$.
3.b) Justifier que, pour tout n, $\mathbb{E}_x[f(X_{(n+1) \wedge T_A})\mathbf{1}_{\{T_A > n\}} \,|\, \mathcal{F}_n] \leq f(X_n)\mathbf{1}_{\{T_A > n\}}$. *(Se rappeler de (i))*
3.c) Conclure.
4. En déduire une inégalité entre $\mathbb{E}_x[f(X_{n \wedge T_A})]$ et $f(x)$ pour tout $n \geq 0$.
5. Supposons $(X_n)_n$ récurrente. En utilisant le lemme de Fatou, en déduire une comparaison entre $\mathbb{E}_x[f(X_{T_A})]$ et $f(x)$.
6. À l'aide de l'hypothèse (ii), conclure que X ne peut pas être récurrente.
7. Application. On considère une chaîne de Markov $(X_n)_n$ sur $\mathbb{N}$ de matrice P donnée par $P(0,1) = 1$ et, pour $x \geq 1$, par

$$P(x, x-1) = \frac{1 - \alpha_x}{2}, \qquad P(x, x+1) = \frac{1 + \alpha_x}{2},$$

où $(\alpha_x)_{x \geq 0}$ est une suite de réels dans $]0,1[$, telle que $\alpha_x > \frac{1}{x}$ pour tout $x > K$, avec $K \in \mathbb{N}$.
7.a) Calculer, pour tout $x \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{E}_x[\frac{1}{X_1} - \frac{1}{x}]$.
7.b) En déduire que la fonction $f : x \mapsto 1/|x|$ (avec $f(0) = 1$) et l'ensemble $A = \{0, \ldots, K\}$ vérifient les hypothèses (i) et (ii).
7.c) Conclure : quelle est la nature de $(X_n)_n$?