Examen Partiel de Probabilités

Durée: 3h. Aucun document n'est autorisé sauf 1 page de format A4.

Exercice 1 *Une agglomération est divisée en trois zones: la ville (zone1), l'aéroport (zone 2) et la gare (zone 3). La matrice ci-dessous indique les probabilités pour qu'un client affrétant un taxi dans l'une de ces trois zones se rende dans une autre.*

départ \ arrivée	zone 1	zone 2	zone 3
zone 1	1/2	1/6	1/3
zone 2	3/4	0	1/4
zone 3	3/4	1/4	0

On s'intéresse au parcours d'un taxi entre ces trois zones.

1. *On note X_n le numéro de la zone où se trouve le taxi après sa n-ième course. Expliquer pourquoi il peut être légitime de modéliser $(X_n)_{n\geq 0}$ par une chaîne de Markov d'espace d'états $E = \{1, 2, 3\}$ (correspondant aux différentes zones) et préciser sa matrice de transition P.*

2. *Classifier ses états, donner leur nature et période. Montrer qu'elle admet une unique probabilité invariante $(\pi(i), i \in E)$ et la calculer.*

3. *On définit une suite $(Y_n)_{n\geq 0}$ de variables aléatoires à valeurs dans $E\times E$ par $Y_n := (X_n, X_{n+1})$.*

   (a) *Montrer que $(Y_n)_{n\geq 0}$ est une chaîne de Markov et préciser son espace d'états F et sa matrice de transition Q.*

   (b) *Montrer que ν, définie par $\nu((i, j)) := \pi(i)P(i, j)$, $(i, j) \in F$, est une probabilité invariante pour $(Y_n)_{n\geq 0}$.*

4. *On suppose que le taxi part de la gare. Le tableau $C := (C(i, j))_{i,j\in E}$ ci-dessous indique, en euros, le coût d'une course de taxi en fonction des zones de départ et d'arrivée.*

départ \ arrivée	*zone 1*	*zone 2*	*zone 3*
zone 1	*20*	*60*	*30*
zone 2	*60*	*0*	*40*
zone 3	*30*	*40*	*0*

Exprimer le coût moyen des N premières courses (parcours de X_0 à X_N) en fonction de la matrice C et de (Y_n). Calculer sa limite presque sûre quand $N \to \infty$. [Indication: penser à vérifier que Y est irréductible; pour cela vous pouvez montrer que pour tous $y, z \in F$, $Q(y, z) > 0$ ou $Q^2(y, z) > 0$].

Exercice 2 *Considérons une chaîne de Markov $(X_n)_{n\geq 0}$ sur l'espace d'états $E = \{1,2,3,4,5\}$ avec la matrice de transition P donnée par*

$$P = \begin{pmatrix} 1/3 & 0 & 1/12 & 1/4 & 1/3 \\ 0 & 1/4 & 0 & 0 & 3/4 \\ 1/3 & 1/12 & 1/2 & 0 & 1/12 \\ 0 & 1/3 & 1/4 & 1/4 & 1/6 \\ 0 & 1/3 & 0 & 0 & 2/3 \end{pmatrix}.$$

1. *Décomposer E en classes de communication. Préciser l'unique classe récurrente $\mathcal{C}$ et l'ensemble des états transients $\mathcal{T}$. Donner les périodes des états dans $\mathcal{C}$ et dans $\mathcal{T}$. [Justifier vos résultats sur la transience/récurrence et la période des états].*

2. *Soit $\tau := \inf\{n \geq 0 : X_n \in \mathcal{C}\}$. Pour $x \in \mathcal{T}$, on définit $q(x) := \mathbb{P}_x\big(\tau < \infty\big)$ la probabilité que la chaîne, partant de x, soit absorbée par $\mathcal{C}$. Calculer $q(x)$ pour tout $x \in \mathcal{T}$ de 2 façons : comme solution d'un système d'équations, et par un argument direct.*

3. *Soit $u(x) := \mathbb{E}_x\big(\tau\big)$ pour tout $x \in E$. Montrer que u est solution de*

$$u(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in \mathcal{C}, \\ 1 + Pu(x) & \text{si } x \notin \mathcal{C}. \end{cases}$$

   [Indication: Décomposer selon la valeur de X_1 et utiliser la propriété de Markov au temps 1]. En déduire la valeur de $u(x)$ pour chaque $x \in E$.

4. *Soit $f(x) := \mathbb{P}_x\big(X_\tau = 2\big)$ pour $x \in E$. Montrer que f est solution de*

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = 2, \\ 0 & \text{si } x \in \mathcal{C}\backslash\{2\}, \\ Pf(x) & \text{si } x \notin \mathcal{C}. \end{cases}$$

   En déduire la valeur de $f(x)$ pour tout $x \in E$.

Exercice 3 *Soit $p \in]0,1[$. Soit $(\alpha_k)_{k\geq 0}$ une suite de réels dans $]0,1[$. Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une chaîne de Markov à valeurs dans $\mathbb{N}$, dont la matrice de transition P est donnée par :*

$$\text{pour tout } k \in \mathbb{N}^*, \qquad P(k,k) = 1 - \alpha_k, \qquad P(k,k+1) = \alpha_k p, \qquad P(k,0) = \alpha_k(1-p),$$

et $P(0,0) = 1 - p\alpha_0 = 1 - P(0,1)$.

1. *Représenter le graphe de cette chaîne de Markov. Quelles sont les classes ?*

2. *On cherche les mesures invariantes $\mu = (\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$.*

   (a) *Écrire les équations vérifiées par une telle mesure μ.*

   (b) *En déduire une expression de μ_n en fonction de μ_0 (et des paramètres p et $(\alpha_i)_i$).*

   (c) *À quelle condition, nécessaire et suffisante, la chaîne est-elle récurrente positive ? Exemple : pour $\alpha_k = p^k$, la chaîne est-elle récurrente positive ?*

3. *On s'intéresse à la récurrence/transience de la chaîne. Soit $n \geq 2$. On pose $f(j) := \mathbb{P}_j(T_0 > T_n)$, pour $0 \leq j \leq n$, où $T_k := \inf\{i \geq 0 : X_i = k\}$. Par la propriété de Markov, trouver une relation entre $f(j)$ et $f(j+1)$ pour $j = 0, \ldots, n-1$, en déduire f. En faisant tendre $n \to \infty$, conclure.*

— Fin —