
DM2 Probabilités

Attention à la clarté de votre rédaction.

Exercice 1 *Soit $(\mathcal{B}_n)$ une filtration et soit $(\xi_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires telle que pour tout $n \geq 1$, ξ_n est $\mathcal{B}_n$-mesurable. On suppose que presque sûrement $0 \leq \xi_n \leq 1$. On définit*

$$Y_n := \xi_n - \mathbb{E}(\xi_n|\mathcal{B}_{n-1}), \qquad Z_n := \sum_{i=1}^{n} Y_i.$$

1. *Montrer que $(Z_n)_{n\geq 1}$ est une $(\mathcal{B}_n)_{n\geq 1}$ martingale. En déduire que $(Z_n^+)_{n\geq 1}$ est une $(\mathcal{B}_n)_{n\geq 1}$ sous-martingale.*

2. *Pour $r \in \mathbb{R}$, on définit $\tau := \inf\{n \geq 1 : Z_n > r\}$. Montrer que τ est un $(\mathcal{B}_n)_{n\geq 1}$ temps d'arrêt.*

3. *Montrer que $\sup_{n\geq 1} \mathbb{E} Z^+_{\tau\wedge n} < \infty$, où $\tau \wedge n := \min(\tau, n)$. En déduire (utiliser Théorème 3.28 dans le cours) que presque sûrement, $Z^+_{\tau\wedge n}$ converge et que sur $\{\sup_{n\geq 1} Z_n \leq r\}$, Z_n converge quand $n \to \infty$.*

4. *En déduire que presque sûrement, sur $\{\sup_{n\geq 1} Z_n < \infty\}$, Z_n converge quand $n \to \infty$.*

5. *Montrer que presque sûrement, sur $\{\inf_{n\geq 1} Z_n > -\infty\}$, Z_n converge quand $n \to \infty$. En déduire que presque sûrement*

$$(*) \qquad \Big\{ \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n < \infty \Big\} = \Big\{ \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E}(\xi_n|\mathcal{B}_{n-1}) < \infty \Big\}.$$

Problème 2 *L'objectif de ce problème est de démontrer la loi du logarithme itéré pour la marche aléatoire (S_n): $S_0 := 0$, $S_n := X_1 + ... + X_n$, $n \geq 1$, où $(X_i)_{i\geq 1}$ est une suite de v.a. i.i.d. de loi $\mathcal{N}(0,1)$ gaussienne standard. On va démontrer que*

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{S_n}{\sqrt{2n \log\log n}} = 1, \qquad p.s.$$

Dans toute la suite soit $\mathcal{F}_n := \sigma\{X_1, ..., X_n\}$, pour $n \geq 1$ et $\mathcal{F}_0$ la tribu triviale.

1. *Dans cette partie on montrera la borne supérieure.*

   (a) *Comme prépartif, on vérifiera que pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $\mathbb{E}[e^{\lambda S_1}] = e^{\lambda^2/2}$ et que pour tout $n \geq 1$, S_n a la même loi que $\sqrt{n} S_1$. Montrer que $\mathbb{P}(S_1 > x) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{x} e^{-x^2/2}$ quand $x \to \infty$.*

   (b) *Montrer que pour tout $\lambda > 0$, $e^{\lambda S_n}$ est une $(\mathcal{F}_n)$-sousmartingale. En déduire, à l'aide de l'inégalité maximale de Doob que pour tout $x > 0$,*

   $$\mathbb{P}\Big(\max_{1\leq k\leq n} S_k \geq x \Big) \leq e^{-\lambda x} \mathbb{E} e^{\lambda S_n}.$$

   En calculant $\mathbb{E} e^{\lambda S_n}$ et ensuite optimisant sur $\lambda \in]0, \infty[$, montrer que

   $$\mathbb{P}\Big(\max_{1\leq k\leq n} S_k \geq x \Big) \leq e^{-x^2/(2n)}.$$

(c) *Soit* $\varepsilon > 0$. *Pour tout* $j \geq 100$, *on pose* $n_j := \lfloor e^{\frac{j}{\log j}} \rfloor$ *et*

$$E_j := \{ \max_{1 \leq k \leq n_{j+1}} S_k \geq \sqrt{(2+\varepsilon) n_j \log\log n_j} \}.$$

Vérifier que $\frac{n_{j+1}}{n_j} \to 1$ *quand* $j \to \infty$ *et montrer que* $\sum_{j=2}^{\infty} \mathbb{P}(E_j) < \infty$.

(d) *En déduire, à l'aide du lemme de Borel–Cantelli, que presque sûrement, pour tout* j *assez grand,* $\max_{1 \leq k \leq n_{j+1}} S_k < \sqrt{(2+\varepsilon) n_j \log\log n_j}$.

(e) *En déduire que*

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{S_n}{\sqrt{2n \log\log n}} \leq 1, \qquad p.s.$$

2. *Dans cette partie on montrera la borne inférieure.*

(a) *Soit* $\varepsilon \in]0, \frac{1}{9}[$. *Pour tout* $j \geq 100$, *on pose* $m_j := j^j$ *et*

$$A_j := \Big\{ S_{m_j} > \sqrt{(2-2\varepsilon) m_j \log\log m_j} \Big\}, \qquad B_j := \Big\{ -S_{m_j} \leq \sqrt{(2+\varepsilon) m_j \log\log m_j} \Big\}.$$

Vérifier que $\frac{m_{j+1}}{m_j} \to \infty$ *quand* $j \to \infty$, *et qu'il existe un entier* $j_0 \equiv j_0(\varepsilon)$ *tel que pour tout* $j \geq j_0$,

$$A_{j+1} \supset B_j \cap \{ S_{m_{j+1}} - S_{m_j} > \sqrt{(2-\varepsilon) m_{j+1} \log\log m_{j+1}} \}.$$

(b) *Utiliser (1.a) et montrer que pour tout* j *assez grand, on a*

$$\mathbb{P}(A_{j+1} \,|\, \mathcal{F}_{m_j}) \geq j^{-(1-\frac{\varepsilon}{4})} 1_{B_j}.$$

(c) *Utiliser la conclusion dans (1.e) pour montrer que* $\sum_j j^{-(1-\frac{\varepsilon}{4})} 1_{B_j} = \infty$ *presque sûrement. Ensuite utiliser la conclusion* $(*)$ *dans Exercice 1 pour conclure que* $\sum_j 1_{A_j} = \infty$ *presque sûrement.*

(d) *En déduire que*

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{S_n}{\sqrt{2n \log\log n}} \geq 1, \qquad p.s.$$

— **Fin** —