

FICHE 4 – VECTEURS GAUSSIENS

Exercice 1. Soit X et Y deux variables aléatoires i.i.d. de loi $\mathcal{N}(0,1)$.

1. On pose $U = \frac{X+Y}{2}$ et $V = \frac{X-Y}{2}$. Montrer que (U, V) est un vecteur gaussien, et déterminer sa loi.
2. On pose $W = \frac{1}{2}(X-U)^2 + \frac{1}{2}(Y-U)^2$, montrer que U et W sont indépendantes et déterminer la loi de W .

Exercice 2. Soit X une variable de loi $\mathcal{N}(0,1)$, et ε une variable aléatoire de loi $\mathbb{P}(\varepsilon = +1) = \mathbb{P}(\varepsilon = -1) = \frac{1}{2}$, indépendante de X .

1. Quelle est la loi de $Y = \varepsilon X$?
2. Calculer la matrice de covariance de (X, Y) .
3. X et Y sont-elles indépendantes? *Par exemple, comparer $\mathbb{E}[X^2 Y^2]$ à $\mathbb{E}[X^2] \mathbb{E}[Y^2]$; on peut faire autrement.*
4. Le couple (X, Y) est-il un vecteur gaussien ?

Exercice 3. Soit X un vecteur gaussien centré, de covariance Γ sur \mathbb{R}^d .

1. Pour tout vecteur $u \in \mathbb{R}^d$, quelle est la loi de $\langle u, X \rangle$?
2. Pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$, quelle est la matrice de covariance de AX ?
3. Montrer que $\mathbb{E}[\|X\|^2] = \text{trace}(\Gamma)$.

Exercice 4. Soit X_1, \dots, X_n des variables aléatoires indépendantes, de loi $\mathcal{N}(0,1)$. Déterminer la loi conditionnelle de X_1 sachant $S_n = X_1 + \dots + X_n$.

Exercice 5. Soit $\rho \in]-1, 1[$ et $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ un vecteur de loi $\mathcal{N}(0, \Sigma_\rho)$, où $\Sigma_\rho = \begin{pmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer la densité de (X, Y) .
2. Déterminer $\mathbb{E}(Y|X)$.
3. Calculer $\text{Var}(Y - \mathbb{E}(Y|X))$.

Exercice 6. Soit (X, Y, Z) un vecteur gaussien centré de \mathbb{R}^3 tel que $\text{Var}(X) = \text{Var}(Y) = \text{Var}(Z) = 1$, $\text{Cov}(X, Z) = 1/2$ et $X + Y$ est indépendant de (Y, Z) . En déduire la matrice de covariance Γ de (X, Y, Z) . Est-elle inversible? Trouver une relation linéaire entre X, Y, Z .

Exercice 7. Soit $Z = (Z_1, \dots, Z_d)^T$ de loi $\mathcal{N}(0, I_d)$.

1. Soit $u, v \in \mathbb{R}^d$. On définit $U = \langle u, Z \rangle$ et $V = \langle v, Z \rangle$.
- 1.a) Montrer que $\text{Cov}(U, V) = \langle u, v \rangle$. Donner la matrice de covariance de (U, V) .
- 1.b) Montrer que $\mathbb{E}[U | V] = \frac{\langle u, v \rangle}{\|v\|^2} V$.

2. Soit $A, B \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$. On définit $U = AZ$ et $V = BZ$. Donner (par blocs) la matrice de covariance de $\begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix}$.

3. Soit E un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^d , et $F = E^\perp$ son orthogonal. Montrer que les projections orthogonales $U = P_E(Z)$ et $V = P_F(Z)$ sont indépendantes.

Exercice 8 – Moyenne et variance empiriques. Soit X_1, \dots, X_n des variables aléatoires i.i.d., suivant une loi normale. On définit

$$\bar{X}_n = \frac{X_1 + \dots + X_n}{n} \quad \text{et} \quad S_n^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2.$$

1. Soit $i \in \{1, \dots, n\}$. Calculer $\text{Cov}(X_i, \bar{X}_n)$.
2. En déduire que \bar{X}_n et $Z = (X_1 - \bar{X}_n, \dots, X_n - \bar{X}_n)^T$ sont indépendantes. Conclure que \bar{X}_n et S_n^2 sont indépendantes.

Exercice 9. Soit X un vecteur aléatoire de \mathbb{R}^n de loi $\mathcal{N}(0, \Gamma)$. On note (v_1, \dots, v_n) une base orthonormée de vecteurs propres de Γ , et $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ les valeurs propres associées. Soit $d < n$ et H un s.e.v. de \mathbb{R}^n de dimension d . On note p_H la projection orthogonale sur le s.e.v. H .

1. Exprimez $\mathbb{E}(\|X\|_2^2)$ en termes de $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Déterminez une expression de $\mathbb{E}(\|p_H(X)\|_2^2)$, et en déduire une formule pour $\mathbb{E}(\|X - p_H(X)\|_2^2)$.
2. Quel s.e.v. de dimension d minimise la valeur de $\mathbb{E}(\|X - p_H(X)\|_2^2)$? Cette observation est à la base de l'Analyse en Composantes Principales.