Master 1re Année
Modèles Aléatoires
Mardi 17 janvier 2012
durée 2h00

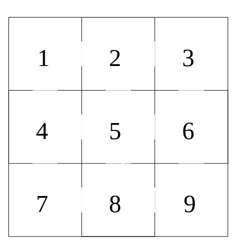
Tous documents, calculatrices et téléphones mobiles sont interdits.

Exercice 1.
On note $(X_n, n \in \mathbb{N})$ la chaîne de Markov sur l'ensemble $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ dont la matrice de transition est :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 0 & 0 & 1/4 & 1/4 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/4 & 0 & 0 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

1. Représenter le diagramme de transition.
2. Classifier les états. On note T l'ensemble des états transients et R l'ensemble des états récurrents. Décomposer l'ensemble des états récurrents R en partition de classes irréductibles $R_k, k \in I$.
3. On note $\tau = \inf\{n \geq 1; X_n \in R\}$. Pour tout $i \in T$ et tout $k \in I$ déterminer $\rho_i(R_k) = \mathbb{P}_i(X_\tau \in R_k)$, la probabilité que partant de i la chaîne de Markov soit absorbée par la classe R_k.
4. Pour tout $i \in T$, calculer $\mathbb{E}_i[\tau]$.
5. Déterminer les probabilités invariantes de la chaîne de Markov.
6. Déterminer le comportement de la chaîne de Markov en temps grand en fonction du point de départ.

Exercice 2. Un rat se déplace dans un labyrinthe représenté par la figure ci-dessous.



A chaque unité de temps, il change de case : lorsque la case où il se trouve comporte k portes, il se déplace vers l'une des k cases voisines.

1. Dans un premier temps, on suppose que le déplacement du rat vers l'une des k cases voisines se fait de façon équiprobable : chacune a une probabilité $1/k$ d'être choisie. Montrer que la position à chaque instant du rat peut être assimilée à une chaîne de Markov $(X_n, n \geq 0)$ dont l'espace d'états est $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Donner la matrice de transition P et dessiner le diagramme.
2. Cette chaîne de Markov est-elle irréductible ? Pour chacun des états $x \in E$, dire s'il est transient, récurrent nul, ou récurrent positif.
3. Montrer qu'il existe une unique probabilité invariante π pour la chaîne de Markov $(X_n, n \geq 0)$ sur E (on ne demande pas de déterminer π pour le moment).
4. On considère la partition de l'espace d'états en 3 classes :

$$a = \{1, 3, 7, 9\} \qquad b = \{2, 4, 6, 8\} \qquad c = \{5\}$$

   On note $\tilde{X}_n$ la classe à laquelle X_n appartient. Montrer que $(\tilde{X}_n, n \geq 0)$ est aussi une chaîne de Markov, sur $\tilde{E} = \{a, b, c\}$, donner sa matrice de transition $\tilde{P}$ et dessiner son diagramme.
5. Si le rat part d'un des coins, combien de temps mettra-t-il en moyenne pour atteindre le fromage qui se trouve au centre ?
6. Montrer que la chaîne de Markov $(\tilde{X}_n, n \geq 0)$ admet une unique probabilité invariante $\tilde{\pi}$ que l'on déterminera. En utilisant ce résultat, déterminer π.
7. Le rat n'est pas si bête : il choisit à chaque étape de façon équiprobable l'une des portes parmi celles qu'il ne vient pas d'emprunter. Montrer que la suite $(X_n, n \geq 0)$ de ses positions successives n'est plus une chaîne de Markov.
8. Modéliser l'évolution de son cheminement par une chaîne de Markov $(Z_n, n \geq 0)$.
9. En s'inspirant de la simplification en la chaîte $(Y_n, n \geq 0)$, déduire de $(Z_n, n \geq 0)$ une chaîne de Markov $(T_n, n \geq 0)$ décrivant les visites successives par le rat des états a, b et c.
10. Si le rat part d'un des coins, combien de temps mettra-t-il en moyenne pour atteindre le fromage qui se trouve au centre dans ce cas ?