Université Paris 13, Institut Galilée M1 – Modèles aléatoires
Année universitaire 2012-2013

Fiche 4 – Mesures invariantes

Exercice 1. On considère sur $E = \{0, 1, 2\}$ la chaîne de Markov de matrice de transition

$$Q = \begin{pmatrix} 1/3 & 0 & 2/3 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

Décrire la nature de la chaîne. Déterminer les mesures invariantes et les probabilités invariantes.

Exercice 2. On considère une chaîne de Markov $(X_n)_{n\geq 0}$ d'espace d'états $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ et de matrice de transition donnée ci-dessous (c'est celle du partiel) :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1/5 & 1/5 & 1/5 & 1/5 & 0 & 1/5 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 & 3/4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1/4 & 0 & 1/4 & 0 & 0 & 1/4 \\ 1/3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2/3 \end{pmatrix}$$

Déterminer les probabilités invariantes de cette chaîne de Markov.

Exercice 3. Soit $p \in]0, 1[$. On note $(X_n)_n$ la chaîne de Markov homogène sur $\mathbb{N}$ définie par : pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{P}(X_1 = k + 1|X_0 = k) = p = 1 - \mathbb{P}(X_1 = 0|X_0 = k).$$

1. Représenter le schéma de cette chaîne de Markov.
2. Calculer la loi du temps de retour τ_0 sous $\mathbb{P}_0$.
3. Montrer que la chaîne est récurrente irréductible.
4. Montrer qu'il existe une unique probabilité invariante pour cette chaîne et la calculer.

Exercice 4. *Classes sociales*
La matrice de transition ci-dessous décrit les probabilités pour qu'un enfant né dans un milieu parental de type U (upper class), M (middle-class) ou L (lower class) se retrouve, à l'âge adulte, avec une activité professionnelle relevant du type U, M ou L.

$$\begin{pmatrix} 0.45 & 0.48 & 0.07 \\ 0.05 & 0.70 & 0.25 \\ 0.01 & 0.50 & 0.49 \end{pmatrix}$$

Quelle devrait-être la répartition initiale (à la date $n = 0$) pour qu'au cours des générations suivantes cette répartition ne soit pas modifiée ?

Exercice 5 – *Mesure réversible.* Soit $X = (X_n)_{n\geq 0}$ une chaîne de Markov sur un espace d'états E. On suppose qu'il existe une mesure π telle que, pour tous $x, y \in E$,

$$\pi(x)p(x, y) = \pi(y)p(y, x).$$

π est appelée une mesure réversible pour X.
1. Montrer que π est une mesure invariante pour X.
2. On suppose de plus que π est une mesure de probabilité. Quelle est la loi de X_n si la loi initiale est π ? Montrer, pour $n \in \mathbb{N}$ et $x, y \in E$,

$$\mathbb{P}_\pi(X_n = y|X_{n+1} = x) = p(x, y).$$

3. Soit $N \geq 1$. Montrer, pour $0 \leq n \leq N$ et $x_n, \ldots, x_N \in E$,

$$\mathbb{P}_\pi(X_n = x_n|X_{n+1} = x_{n+1}, X_{n+2} = x_{n+2}, \ldots, X_N = x_N) = p(x_{n+1}, x_n).$$

Que signifie cette propriété ?

Exercice 6 – ***Urne d'Ehrenfest.*** On répartit dans deux urnes un total de N boules (par exemple, N à gauche et 0 à droite). À chaque instant $n \geq 0$, on tire une boule au hasard, uniformément parmi les N boules, et on la dépose dans l'urne opposée à celle où elle se trouvait.
1. On note X_n le nombre de boules dans la première urne avant le n-ième tirage. Justifier que $(X_n)_n$ est une chaîne de Markov sur $E = \{0, \dots, N\}$ et donner sa matrice de transition.
2. Déterminer les éventuelles mesures réversibles pour la chaîne de Markov (cf. exercice précédent). Quelle est la loi invariante pour $(X_n)_n$?
3. Si dans la configuration initiale il y a N boules à gauche et 0 à droite, quelle est le temps moyen de retour de la chaîne de Markov à cette configuration ?

Exercice 7. *Marche aléatoire sur un graphe*
On consière un graphe fini $G = (S, A)$: un ensemble S de sommets, et un ensemble A de paires de sommets, nommées arêtes. Pour $x, y \in S$, on note $x \sim y$ si $\{x, y\} \in A$. Le degré d'un sommet $x \in S$, noté $\deg(x)$, est le nombre de voisins de x, c'est-à-dire le nombre de sommets y tels que $y \sim x$. On suppose que, pour tout $x \in S$, $\deg(x) \geq 1$. On définit la chaîne de Markov $(X_n)_{n\geq 0}$ d'espace d'états S et de matrice de transition donnée par :

$$\text{pour tous } x, y \in S,\ p(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{\deg(x)} & \text{si } x \sim y \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Pourquoi cela définit-il bien une matrice de transition ?
2. On considère la mesure π sur S donnée par $\pi(\{x\}) = \deg(x)$. Montrer que cette mesure est réversible. En déduire une probabilité invariante.
3. On suppose que la chaîne est irréductible. Partant de x, que vaut l'espérance du temps de retour en x ? Si de plus tous les sommets ont même degré, que peut-on dire sur la loi invariante de $(X_n)_n$?
4. Application : sur un échiquier, on déplace une tour aléatoirement sur l'une des cases qui lui sont accessibles (chacune ayant même probabilité). Quel est le temps moyen de retour au point de départ ? Même question pour un cavalier.