

Les subdivisions géométriques stochastiques

Stanislav Volkov

Université de Lund

Marseille, juin 2014

Introduction

Chaînes de Markov concernant la géométrie et les polygones ont été assez largement étudié dans la littérature (par exemple J. Ding, L.R. Hitt, X-M. Zhang, *Markov chains and dynamic geometry of polygons*, 2003). La motivation principale de mon étude provient de Diaconis et Miclo, 2011 : un triangle non dégénéré est divisé par ses trois médianes dans 6 triangles plus petits, et l'un de ces nouveaux triangles est choisi avec la même probabilité, devenant ainsi le «nouveau» triangle. La procédure est répétée infiniment. On a montré que, dans un certain sens, le triangle limitant sera «plat».

Nous considérons plusieurs généralisations du modèle ci-dessus.

Nous considérons plusieurs généralisations du modèle ci-dessus.

- ▶ subdivisions d'un quadrilatère par les lignes reliant les points médians des côtés opposés ;

Nous considérons plusieurs généralisations du modèle ci-dessus.

- ▶ subdivisions d'un quadrilatère par les lignes reliant les points médians des côtés opposés ;
- ▶ **subdivision d'un triangle par les bissectrices ;**

Nous considérons plusieurs généralisations du modèle ci-dessus.

- ▶ subdivisions d'un quadrilatère par les lignes reliant les points médians des côtés opposés ;
- ▶ subdivision d'un triangle par les bissectrices ;
- ▶ subdivision résultant d'une séquence de triangles obtenus en choisissant au hasard un point de chaque côté qui devient un sommet du triangle nouveau.

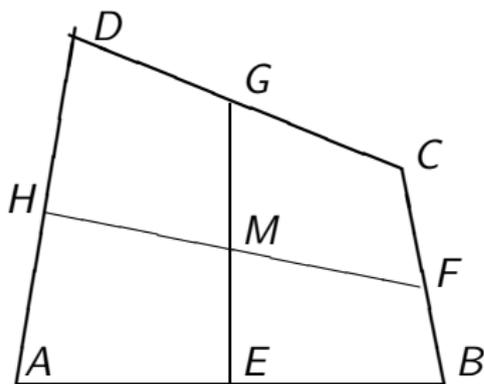
Subdivision quadrilatère aléatoire

On a un quadrilatère convexe $ABCD$. Soit E, F, G, H les points médians des côtés AB, BC, CD , et DA respectivement. Soit M le point d'intersection des segments EG et FH . Nous remplaçons $ABCD$ par l'un des quatre quadrilatères $AEMH, EBFM, MFCG$ et $HMGD$ équiprobablement. Supposons que l'on répète cette procédure infiniment. Quelle est la forme du quadrilatère obtenu comme la limite de cette procédure ?

Subdivision quadrilatère aléatoire

Subdivision aléatoire de triangle par bissectrices

Sous-triangle aléatoire du triangle



Théorème 1

La forme limite du quadrilatère sera p.s. un parallélogramme, et la vitesse de convergence est en fait géométrique. (Notez que la forme de parallélogramme soi-même est invariante pour la procédure).

Subdivision aléatoire de triangle par bissectrices

Nous subdivisons le triangle ABC par les trois **bissectrices** qui se coupent les côtés AB , BC , CA chez points E , F , G respectivement. Soit M le point d'intersections de toutes les bissectrices, c'est-à-dire le centre du cercle inscrit.

Subdivision aléatoire de triangle par bissectrices

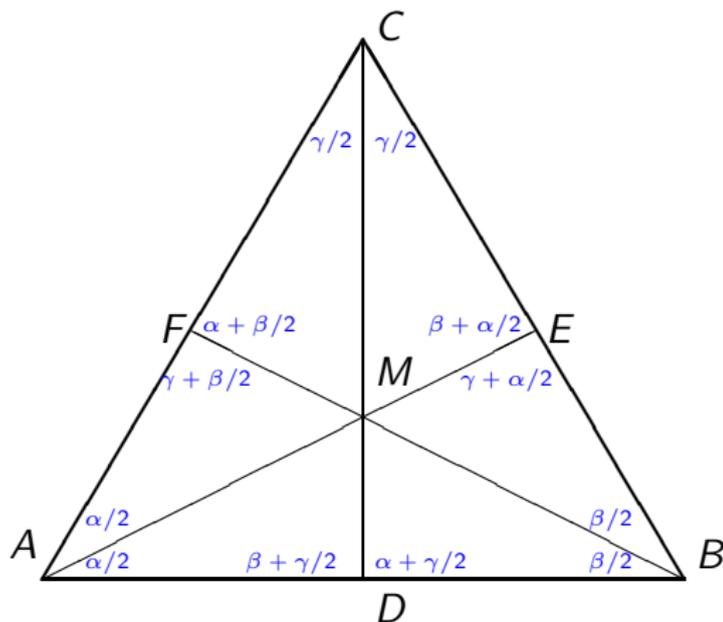
Nous subdivisons le triangle ABC par les trois **bissectrices** qui se coupent les côtés AB , BC , CA chez points E , F , G respectivement. Soit M le point d'intersections de toutes les bissectrices, c'est-à-dire le centre du cercle inscrit. Ensuite, le triangle ABC se remplace par l'un des triangles suivants : ADM , DBM , BEM , ECM , CFM , FAM avec la probabilité de $1/6$.

Subdivision aléatoire de triangle par bissectrices

Nous subdivisons le triangle ABC par les trois **bissectrices** qui se coupent les côtés AB , BC , CA chez points E , F , G respectivement. Soit M le point d'intersections de toutes les bissectrices, c'est-à-dire le centre du cercle inscrit.

Ensuite, le triangle ABC se remplace par l'un des triangles suivants : ADM , DBM , BEM , ECM , CFM , FAM avec la probabilité de $1/6$.

Nous nous intéressons surtout à *la forme* du triangle limitant obtenu par la répétition de cette procédure.



Il est assez utile de travailler avec les angles du triangle. Si le triangle d'origine a les angles (α, β, γ) , $\alpha + \beta + \gamma = \pi$, donc le nouveau triangle a l'un des six ensembles d'angles :

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\alpha}{2}, \gamma + \frac{\beta}{2}, \frac{\alpha + \beta}{2} \right), \quad \left(\frac{\alpha}{2}, \beta + \frac{\gamma}{2}, \frac{\alpha + \gamma}{2} \right), \\ & \left(\frac{\beta}{2}, \alpha + \frac{\gamma}{2}, \frac{\beta + \gamma}{2} \right), \quad \left(\frac{\beta}{2}, \gamma + \frac{\alpha}{2}, \frac{\alpha + \beta}{2} \right), \\ & \left(\frac{\gamma}{2}, \beta + \frac{\alpha}{2}, \frac{\alpha + \gamma}{2} \right), \quad \left(\frac{\gamma}{2}, \alpha + \frac{\beta}{2}, \frac{\beta + \gamma}{2} \right). \end{aligned} \quad (1)$$

Certainement, on ne peut pas s'attendre à une convergence presque sûrement pour cette procédure (parce que n'importe quel angle peut être réduit de moitié à l'étape suivante avec la probabilité de $1/3$).

Nous pouvons générer la séquence de triangles en choisissant toujours le triangle en bas à gauche à l'aide de la correspondance $(\alpha, \beta, \gamma) \rightarrow \left(\frac{\alpha}{2}, \gamma + \frac{\beta}{2}, \frac{\alpha+\beta}{2}\right)$, et ensuite en effectuant une permutation aléatoire de l'ensemble de trois nouveaux angles obtenus.

Nous pouvons générer la séquence de triangles en choisissant toujours le triangle en bas à gauche à l'aide de la correspondance $(\alpha, \beta, \gamma) \rightarrow \left(\frac{\alpha}{2}, \gamma + \frac{\beta}{2}, \frac{\alpha+\beta}{2}\right)$, et ensuite en effectuant une permutation aléatoire de l'ensemble de trois nouveaux angles obtenus.

Formellement, soit $(\alpha_n, \beta_n, \gamma_n)$ l'ensemble des angles de la n -ième triangle, alors

$$\begin{aligned} (\alpha_{n+1}, \beta_{n+1}, \gamma_{n+1}) &= \sigma_n \left(\frac{\alpha_n}{2}, \gamma_n + \frac{\beta_n}{2}, \frac{\alpha_n + \beta_n}{2} \right) \\ &= \sigma_n \left(\frac{\alpha_n}{2}, \pi - \alpha_n - \frac{\beta_n}{2}, \frac{\alpha_n + \beta_n}{2} \right) \end{aligned} \quad (2)$$

où $\sigma_n = \{\sigma^{(1)}, \sigma^{(2)}, \sigma^{(3)}, \sigma^{(4)}, \sigma^{(5)}, \sigma^{(6)}\}$ est une permutation aléatoire de l'ensemble de trois éléments ; $\sigma_n((a, b, c))$ prend l'une des six valeurs possibles

$$\{(a, b, c), (b, c, a), (c, a, b), (c, b, a), (b, a, c), (a, c, b)\}$$

Théorème 2

La séquence $(\alpha_n, \beta_n, \gamma_n)$ converge en loi vers une certaine limite.

Théorème 2

La séquence $(\alpha_n, \beta_n, \gamma_n)$ converge en loi vers une certaine limite.

Preuve. Soit $S = \{(\alpha, \beta, \gamma) : \alpha, \beta, \gamma \geq 0, \alpha + \beta + \gamma = \pi\}$ le 2-simplexe avec la distance norme euclidienne. Soit $f_i(u)$, $u \in S$, $i = 1, \dots, 6$ l'ensemble des fonctions données par (1). Soit $u = (\alpha, \beta, \gamma)$ et $v = (\alpha + x, \beta + y, \gamma + z)$, donc $x + y + z = 0$.

Théorème 2

La séquence $(\alpha_n, \beta_n, \gamma_n)$ converge en loi vers une certaine limite.

Preuve. Soit $S = \{(\alpha, \beta, \gamma) : \alpha, \beta, \gamma \geq 0, \alpha + \beta + \gamma = \pi\}$ le 2-simplexe avec la distance norme euclidienne. Soit $f_i(u)$, $u \in S$, $i = 1, \dots, 6$ l'ensemble des fonctions données par (1). Soit $u = (\alpha, \beta, \gamma)$ et $v = (\alpha + x, \beta + y, \gamma + z)$, donc $x + y + z = 0$. Toutes les fonctions f_i sont lipschitziennes et

$$\sum_{i=1}^2 \log \frac{|f_i(u) - f_i(v)|}{|u - v|} = \log \sqrt{\frac{[x^2 + y^2 + [y + z]^2 + xz][x^2 + z^2 + [y + z]^2 + xy]}{4(x^2 + y^2 + z^2)^2}}$$

Théorème 2

La séquence $(\alpha_n, \beta_n, \gamma_n)$ converge en loi vers une certaine limite.

Preuve. Soit $S = \{(\alpha, \beta, \gamma) : \alpha, \beta, \gamma \geq 0, \alpha + \beta + \gamma = \pi\}$ le 2-simplexe avec la distance norme euclidienne. Soit $f_i(u)$, $u \in S$, $i = 1, \dots, 6$ l'ensemble des fonctions données par (1). Soit $u = (\alpha, \beta, \gamma)$ et $v = (\alpha + x, \beta + y, \gamma + z)$, donc $x + y + z = 0$. Toutes les fonctions f_i sont lipschitziennes et

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^2 \log \frac{|f_i(u) - f_i(v)|}{|u - v|} &= \log \sqrt{\frac{[x^2 + y^2 + [y+z]^2 + xz][x^2 + z^2 + [y+z]^2 + xy]}{4(x^2 + y^2 + z^2)^2}} \\ &= \frac{1}{2} \log \frac{(y^2 + 3z^2 + 3yz)(3y^2 + z^2 + 3yz)}{16(y^2 + z^2 + yz)^2} \end{aligned}$$

Théorème 2

La séquence $(\alpha_n, \beta_n, \gamma_n)$ converge en loi vers une certaine limite.

Preuve. Soit $S = \{(\alpha, \beta, \gamma) : \alpha, \beta, \gamma \geq 0, \alpha + \beta + \gamma = \pi\}$ le 2-simplexe avec la distance norme euclidienne. Soit $f_i(u)$, $u \in S$, $i = 1, \dots, 6$ l'ensemble des fonctions données par (1). Soit $u = (\alpha, \beta, \gamma)$ et $v = (\alpha + x, \beta + y, \gamma + z)$, donc $x + y + z = 0$. Toutes les fonctions f_i sont lipschitziennes et

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^2 \log \frac{|f_i(u) - f_i(v)|}{|u - v|} &= \log \sqrt{\frac{[x^2 + y^2 + [y+z]^2 + xz][x^2 + z^2 + [y+z]^2 + xy]}{4(x^2 + y^2 + z^2)^2}} \\ &= \frac{1}{2} \log \frac{(y^2 + 3z^2 + 3yz)(3y^2 + z^2 + 3yz)}{16(y^2 + z^2 + yz)^2} \\ &\leq \frac{1}{2} \log \frac{(3y^2 + 3z^2 + 3yz)(3y^2 + 3z^2 + 3yz)}{16(y^2 + z^2 + yz)^2} = \log \frac{3}{4} < 0. \end{aligned}$$

Théorème 2

La séquence $(\alpha_n, \beta_n, \gamma_n)$ converge en loi vers une certaine limite.

Preuve. Soit $S = \{(\alpha, \beta, \gamma) : \alpha, \beta, \gamma \geq 0, \alpha + \beta + \gamma = \pi\}$ le 2-simplexe avec la distance norme euclidienne. Soit $f_i(u)$, $u \in S$, $i = 1, \dots, 6$ l'ensemble des fonctions données par (1). Soit $u = (\alpha, \beta, \gamma)$ et $v = (\alpha + x, \beta + y, \gamma + z)$, donc $x + y + z = 0$. Toutes les fonctions f_i sont lipschitziennes et

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^2 \log \frac{|f_i(u) - f_i(v)|}{|u - v|} &= \log \sqrt{\frac{[x^2 + y^2 + [y+z]^2 + xz][x^2 + z^2 + [y+z]^2 + xy]}{4(x^2 + y^2 + z^2)^2}} \\ &= \frac{1}{2} \log \frac{(y^2 + 3z^2 + 3yz)(3y^2 + z^2 + 3yz)}{16(y^2 + z^2 + yz)^2} \\ &\leq \frac{1}{2} \log \frac{(3y^2 + 3z^2 + 3yz)(3y^2 + 3z^2 + 3yz)}{16(y^2 + z^2 + yz)^2} = \log \frac{3}{4} < 0. \end{aligned}$$

La majoration identique a lieu aussi pour $i = 3, 4$ et $i = 5, 6$.

Par conséquent, si Z_u représente un ensemble d'angles obtenus de u par subdivision aléatoire, nous avons

$$\mathbb{E} \left[\log \frac{|Z_u - Z_v|}{|u - v|} \right] = \sum_{i=1}^6 \frac{1}{6} \log \frac{|f_i(u) - f_i(v)|}{|u - v|} \leq \log \frac{\sqrt{3}}{2} < 0.$$

Par conséquent, si Z_u représente un ensemble d'angles obtenus de u par subdivision aléatoire, nous avons

$$\mathbb{E} \left[\log \frac{|Z_u - Z_v|}{|u - v|} \right] = \sum_{i=1}^6 \frac{1}{6} \log \frac{|f_i(u) - f_i(v)|}{|u - v|} \leq \log \frac{\sqrt{3}}{2} < 0.$$

D'après le théorème 1 par Barnsley et Elton (1988), la correspondance $u \rightarrow Z_u$ est ergodique, c'est à dire, il existe une mesure de probabilité unique ν sur S telle que pour chaque configuration initiale $u = (\alpha, \beta, \gamma) \in S$ nous avons $Z_u^{(n)} \rightarrow \nu$ en loi. (Ici $Z^{(n)}$ représente la superposition de n applications de Z i.i.d.) ■

Que peut-on dire de la loi du triangle limitant ?

Que peut-on dire de la loi du triangle limitant ?

Pour la simplicité, supposons dorénavant que $\ll \pi = 1 \gg$ afin de

$$\alpha_n + \beta_n + \gamma_n \equiv 1.$$

Que peut-on dire de la loi du triangle limitant ?

Pour la simplicité, supposons dorénavant que « $\pi = 1$ » afin de
 $\alpha_n + \beta_n + \gamma_n \equiv 1$.

Nous savons que (α_n, β_n) converge vers une paire $(\bar{\alpha}, \bar{\beta})$ en loi.
 Depuis $\bar{\beta}$ et $\bar{\gamma}$ ($= 1 - \bar{\alpha} - \bar{\beta}$) suivent la même loi que $\bar{\alpha}$, et aussi
 $\bar{\alpha}\bar{\beta}$, $\bar{\beta}\bar{\gamma}$, $\bar{\gamma}\bar{\alpha}$ suivent la même loi (à cause de la symétrie), on
 conclut

$$\mathbb{E}[\bar{\alpha} + \bar{\beta} + \bar{\gamma}] = 1 \implies \mathbb{E}\bar{\alpha} = \mathbb{E}\bar{\beta} = \mathbb{E}\bar{\gamma} = \frac{1}{3},$$

$$\mathbb{E}[\bar{\alpha} + \bar{\beta} + \bar{\gamma}]^2 = 1 \implies 3\mathbb{E}\bar{\alpha}^2 + 6\mathbb{E}[\bar{\alpha}\bar{\beta}] = 1$$

Que peut-on dire de la loi du triangle limitant ?

Pour la simplicité, supposons dorénavant que « $\pi = 1$ » afin de
 $\alpha_n + \beta_n + \gamma_n \equiv 1$.

Nous savons que (α_n, β_n) converge vers une paire $(\bar{\alpha}, \bar{\beta})$ en loi.
Depuis $\bar{\beta}$ et $\bar{\gamma}$ ($= 1 - \bar{\alpha} - \bar{\beta}$) suivent la même loi que $\bar{\alpha}$, et aussi
 $\bar{\alpha}\bar{\beta}$, $\bar{\beta}\bar{\gamma}$, $\bar{\gamma}\bar{\alpha}$ suivent la même loi (à cause de la symétrie), on
conclut

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\bar{\alpha} + \bar{\beta} + \bar{\gamma}] = 1 &\implies \mathbb{E}\bar{\alpha} = \mathbb{E}\bar{\beta} = \mathbb{E}\bar{\gamma} = \frac{1}{3}, \\ \mathbb{E}[\bar{\alpha} + \bar{\beta} + \bar{\gamma}]^2 = 1 &\implies 3\mathbb{E}\bar{\alpha}^2 + 6\mathbb{E}[\bar{\alpha}\bar{\beta}] = 1\end{aligned}$$

Aussi de (2) on a

$$\mathbb{E}\bar{\alpha}^2 = \frac{1}{3} \left[\frac{1}{4} \mathbb{E}\bar{\alpha}^2 + \mathbb{E} \left[\bar{\gamma} + \frac{\bar{\beta}}{2} \right]^2 + \frac{1}{4} \mathbb{E}(\bar{\alpha} + \bar{\beta})^2 \right].$$

Par conséquent

$$\mathbb{E} \bar{\alpha}^2 = \frac{1}{7}, \quad \mathbb{E} [\bar{\alpha} \bar{\beta}] = \frac{2}{21},$$

$$\text{Var}(\bar{\alpha}) = \frac{2}{63},$$

$$\text{Cov}(\bar{\alpha}, \bar{\beta}) = -\frac{1}{63},$$

qui éclaire un peu la loi de $\bar{\alpha}$ et la dépendance entre $\bar{\alpha}$ et $\bar{\beta}$.

Une question plus intéressante s'agit de la loi jointe de $\bar{\alpha}$, $\bar{\beta}$, $\bar{\gamma}$...

Une question plus intéressante s'agit de la loi jointe de $\bar{\alpha}$, $\bar{\beta}$, $\bar{\gamma}$...

Théorème 3

Soit c_1, c_2, c_3 des nombres réels dont tous ne sont pas égales. Donc la loi de la variable aléatoire $c_1\bar{\alpha} + c_2\bar{\beta} + c_3\bar{\gamma}$ n'a pas des atomes.

Une question plus intéressante s'agit de la loi jointe de $\bar{\alpha}$, $\bar{\beta}$, $\bar{\gamma}$...

Théorème 3

Soit c_1, c_2, c_3 des nombres réels dont tous ne sont pas égales. Donc la loi de la variable aléatoire $c_1\bar{\alpha} + c_2\bar{\beta} + c_3\bar{\gamma}$ n'a pas des atomes.

En fait, on peut conjecturer que la loi de ν n'est pas absolument continue sur le simplexe, et les lois marginales, par exemple, la celle-ci de $\bar{\alpha}$, n'est absolument continue non plus. En revanche, des simulations numériques suggèrent que la densité d'un angle choisi au hasard d'un triangle limitant ressemble à celle illustré sur la Figure 1, ce qui est évidemment tout à fait non-triviale !

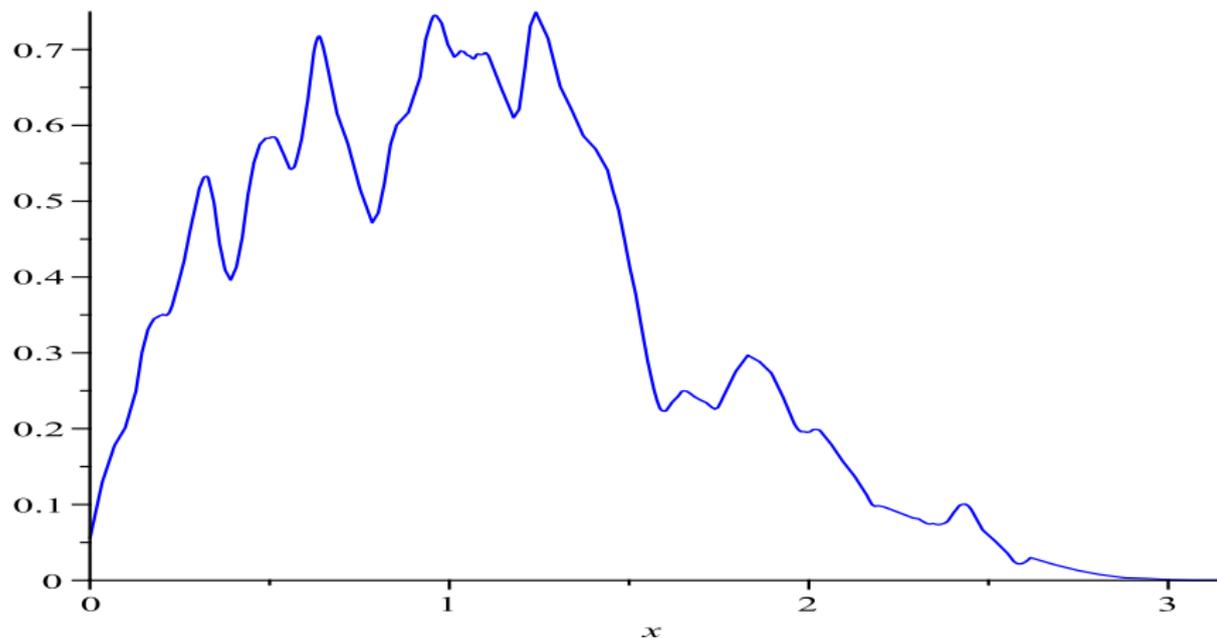


Figure: La densité d'un angle choisi au hasard

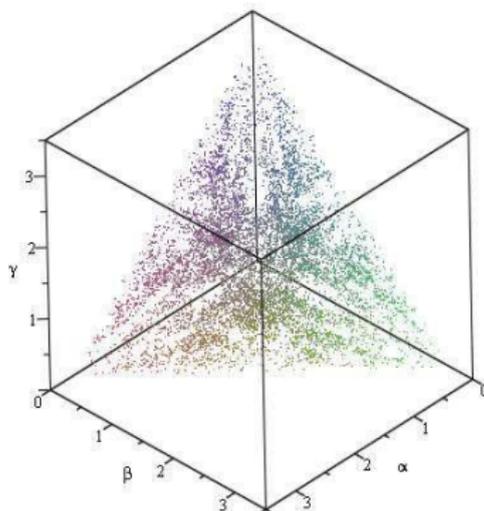
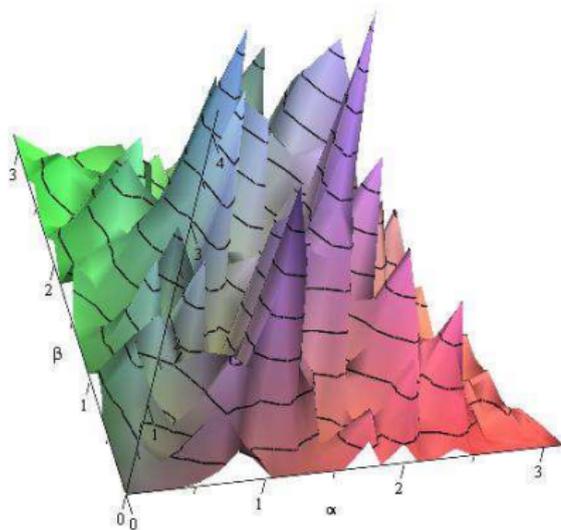


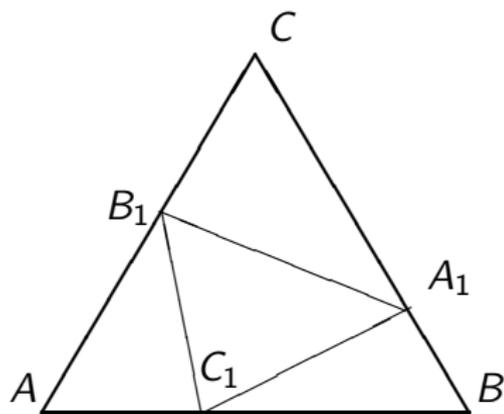
Figure: Densité typique de ν sur simplexe S .

Grâce à la symétrie de la triple $(\bar{\alpha}, \bar{\beta}, \bar{\gamma})$ par rapport aux permutations et le fait que $\bar{\alpha} + \bar{\beta} + \bar{\gamma} = 1$, Théorème 3 suit immédiatement du lemme suivant.

Lemme 1

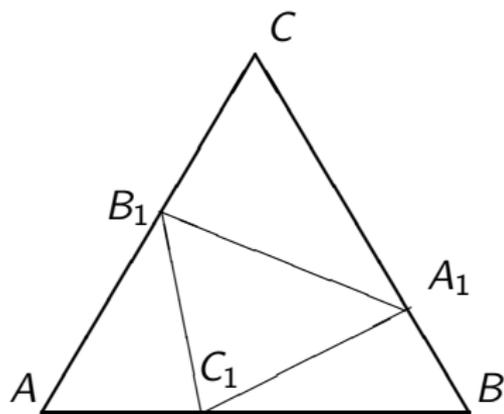
Pour chaque $c \in \mathbb{R}$ et $x \in \mathbb{R}$ on a $\mathbb{P}(\bar{\alpha} + c\bar{\beta} = x) = 0$.

Sous-triangle aléatoire du triangle



Sur chaque côté du triangle choisissons indépendamment des points A_1 , B_1 , C_1 selon la loi uniforme. Le nouveau triangle est formé par ces trois points (A_1, B_1, C_1) .

Sous-triangle aléatoire du triangle



Sur chaque côté du triangle choisissons indépendamment des points A_1 , B_1 , C_1 selon la loi uniforme. Le nouveau triangle est formé par ces trois points (A_1, B_1, C_1).

Répétez cette procédure à l'infini. Quelle est-elle la forme limite ?

Théorème 4

La forme de triangle limitant est plate p.s.

Théorème 4

La forme de triangle limitant est plate p.s.

De plus, si y_n désigne le rapport entre la hauteur du triangle correspondant à son plus grand côté et la longueur de ce côté, alors pour chaque $\kappa < 1 + \frac{\log 4}{3} - \frac{\pi^2}{9} = 0.365\dots$

$$y_n \leq e^{-\kappa n}$$

pour tous n suffisamment grand.

Redimensionnons le triangle de telle sorte que la longueur du plus grand côté (disons, AB) est égale à 1 , et montons ce côté sur le plan cartésien de telle sorte que $A = (0, 0)$, $B = (1, 0)$. Aussi supposons que C se trouve au-dessus de l'axe des abscisses et que $|AC| \geq |BC|$.

Redimensionnons le triangle de telle sorte que la longueur du plus grand côté (disons, AB) est égale à 1, et montons ce côté sur le plan cartésien de telle sorte que $A = (0, 0)$, $B = (1, 0)$. Aussi supposons que C se trouve au-dessus de l'axe des abscisses et que $|AC| \geq |BC|$.

Soit $C = (x, y)$, alors $x \in [1/2, 1]$, $y \geq 0$, et la paire (x, y) caractérise complètement la forme du triangle ABC .

Redimensionnons le triangle de telle sorte que la longueur du plus grand côté (disons, AB) est égale à 1, et montons ce côté sur le plan cartésien de telle sorte que $A = (0, 0)$, $B = (1, 0)$. Aussi supposons que C se trouve au-dessus de l'axe des abscisses et que $|AC| \geq |BC|$.

Soit $C = (x, y)$, alors $x \in [1/2, 1]$, $y \geq 0$, et la paire (x, y) caractérise complètement la forme du triangle ABC .

Donc

$$A_1 = (1 - (1 - x)\xi_a, y\xi_a)$$

$$B_1 = (x(1 - \xi_b), y(1 - \xi_b))$$

$$C_1 = (\xi_c, 0).$$

où ξ_a, ξ_b, ξ_c sont variables aléatoires indépendantes distribuées selon $U[0, 1]$. Notons que y correspond ici à y_n du théorème précédent.

Théorème 5

x_n converge vers $U[1/2, 1]$ en loi.

Théorème 5

x_n converge vers $U[1/2, 1]$ en loi.

Preuve. Puisque $y_n \rightarrow 0$ p.s., et x_{n+1} est continue en y_n dans le voisinage de 0, cela suffit de montrer que x_{n+1} suit la loi de $U[1/2, 1]$ étant donné $y_n = 0$.

Théorème 5

x_n converge vers $U[1/2, 1]$ en loi.

Preuve. Puisque $y_n \rightarrow 0$ p.s., et x_{n+1} est continue en y_n dans le voisinage de 0, cela suffit de montrer que x_{n+1} suit la loi de $U[1/2, 1]$ étant donné $y_n = 0$.

On l'obtient, à son tour, du fait suivant :

Théorème 5

x_n converge vers $U[1/2, 1]$ en loi.

Preuve. Puisque $y_n \rightarrow 0$ p.s., et x_{n+1} est continue en y_n dans le voisinage de 0, cela suffit de montrer que x_{n+1} suit la loi de $U[1/2, 1]$ étant donné $y_n = 0$.

On l'obtient, à son tour, du fait suivant :

Mettons $\mu = 1 - (1 - x)\xi_a$, $\nu = x(1 - \xi_b)$, et ξ_c dans un ordre croissant, et dénotons les valeurs résultantes

$$0 \leq x^{(1)} < x^{(2)} < x^{(3)} \leq 1.$$

Alors $\chi := \frac{x^{(2)} - x^{(1)}}{x^{(3)} - x^{(1)}}$ suit la loi de $U[0, 1]$.

Théorème 5

x_n converge vers $U[1/2, 1]$ en loi.

Preuve. Puisque $y_n \rightarrow 0$ p.s., et x_{n+1} est continue en y_n dans le voisinage de 0, cela suffit de montrer que x_{n+1} suit la loi de $U[1/2, 1]$ étant donné $y_n = 0$.

On l'obtient, à son tour, du fait suivant :

Mettons $\mu = 1 - (1 - x)\xi_a$, $\nu = x(1 - \xi_b)$, et ξ_c dans un ordre croissant, et dénotons les valeurs résultantes

$$0 \leq x^{(1)} < x^{(2)} < x^{(3)} \leq 1.$$

Alors $\chi := \frac{x^{(2)} - x^{(1)}}{x^{(3)} - x^{(1)}}$ suit la loi de $U[0, 1]$.

En effet, pour tout $z \in (0, 1)$ on a

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\chi \leq z) &= \mathbb{P}(\chi \leq z, \xi_c < \nu) + \mathbb{P}(\chi \leq z, \nu \leq \xi_c \leq \mu) \\ &\quad + \mathbb{P}(\chi \leq z, \xi_c > \mu) = (I) + (II) + (III). \end{aligned}$$

Nous avons

$$(I) = \int_0^1 d\xi_b \int_0^1 d\xi_a \int_0^\nu \mathbf{1}_{\left\{ \frac{x(1-\xi_b)-\xi_c}{1-(1-x)\xi_a-\xi_c} < z \right\}} d\xi_c = \begin{cases} \frac{3zx - [z^2 + z + 1]x}{6z(1-x)}, & x < z \\ \frac{3xx - [x^2 + x + 1]z}{6x(1-z)}, & x \geq z \end{cases}$$

Nous avons

$$(I) = \int_0^1 d\xi_b \int_0^1 d\xi_a \int_0^\nu 1_{\left\{ \frac{x(1-\xi_b)-\xi_c}{1-(1-x)\xi_a-\xi_c} < z \right\}} d\xi_c = \begin{cases} \frac{3zx - [z^2 + z + 1]x}{6z(1-x)}, & x < z \\ \frac{3xx - [x^2 + x + 1]z}{6x(1-z)}, & x \geq z \end{cases}$$

$$(II) = \int_0^1 d\xi_a \int_0^1 d\xi_b \int_\nu^\mu 1_{\left\{ \frac{\xi_c - (1-\xi_b)x}{1-\xi_a(1-x) - (1-\xi_b)x} < z \right\}} d\xi_c = z/2,$$

Nous avons

$$(I) = \int_0^1 d\xi_b \int_0^1 d\xi_a \int_0^\nu 1_{\left\{ \frac{x(1-\xi_b)-\xi_c}{1-(1-x)\xi_a-\xi_c} < z \right\}} d\xi_c = \begin{cases} \frac{3zx - [z^2 + z + 1]x}{6z(1-x)}, & x < z \\ \frac{3xx - [x^2 + x + 1]z}{6x(1-z)}, & x \geq z \end{cases}$$

$$(II) = \int_0^1 d\xi_a \int_0^1 d\xi_b \int_\nu^\mu 1_{\left\{ \frac{\xi_c - (1-\xi_b)x}{1-\xi_a(1-x) - (1-\xi_b)x} < z \right\}} d\xi_c = z/2,$$

$$(III) = \int_0^1 d\xi_a \int_0^1 d\xi_b \int_\mu^1 1_{\left\{ \frac{1-\xi_a(1-x) - (1-\xi_b)x}{\xi_c - (1-\xi_b)x} < z \right\}} d\xi_c$$

$$= \begin{cases} \frac{3z^2 + z^2x^2 - 3z^2x + zx^2 - 3zx + x^2}{6z(1-x)} & \text{if } x < z; \\ \frac{(1-x)^2z^2}{6(1-z)x} & \text{if } x \geq z. \end{cases}$$

Nous avons

$$(I) = \int_0^1 d\xi_b \int_0^1 d\xi_a \int_0^\nu 1_{\left\{ \frac{x(1-\xi_b)-\xi_c}{1-(1-x)\xi_a-\xi_c} < z \right\}} d\xi_c = \begin{cases} \frac{3zx - [z^2 + z + 1]x}{6z(1-x)}, & x < z \\ \frac{3xx - [x^2 + x + 1]z}{6x(1-z)}, & x \geq z \end{cases}$$

$$(II) = \int_0^1 d\xi_a \int_0^1 d\xi_b \int_\nu^\mu 1_{\left\{ \frac{\xi_c - (1-\xi_b)x}{1-\xi_a(1-x) - (1-\xi_b)x} < z \right\}} d\xi_c = z/2,$$

$$(III) = \int_0^1 d\xi_a \int_0^1 d\xi_b \int_\mu^1 1_{\left\{ \frac{1-\xi_a(1-x) - (1-\xi_b)x}{\xi_c - (1-\xi_b)x} < z \right\}} d\xi_c$$

$$= \begin{cases} \frac{3z^2 + z^2x^2 - 3z^2x + zx^2 - 3zx + x^2}{6z(1-x)} & \text{if } x < z; \\ \frac{(1-x)^2z^2}{6(1-z)x} & \text{if } x \geq z. \end{cases}$$

En conséquence $\mathbb{P}(\chi \leq z) = (I) + (II) + (III) = z$ pour $z \in [0, 1]$. ■

-  Barnsley, M.; Elton, J. A new class of Markov processes for image encoding. *Adv. in Appl. Probab.* 20 (1988), no. 1, 14–32.
-  Diaconis, P.; Miclo., L. On barycentric subdivision. *Combinatorics, Probability and Computing* 20 (2011), 213–237.
-  Ding, J.; Hitt, L.R.; Zhang, X-M. Markov chains and dynamic geometry of polygons. *Linear Algebra and its Applications* 367 (2003), 255–270 .
-  Hough, B. Tessellation of a triangle by repeated barycentric subdivision. *Electron. Commun. Probab.* 14 (2009), 270–277.
-  Durrett, R. (1996) *Probability: Theory and Examples*. (2nd. ed.) Duxbury Press, Belmont, California.