Contrôle continu, mercredi 22 février 2023

Durée : 1 heure 15 minutes.

Instructions

- Le sujet comporte 5 questions à choix multiples et 3 problèmes.
- Les calculatrices, portables et documents sont interdits.
- Dans le cas des questions à choix multiples, il suffit d'indiquer la réponse correcte sans justification.
- Chaque question à choix multiples a une seule réponse correcte.
- Une attention particulière sera portée à la qualité de la rédaction des solutions des problèmes. Les réponses non justifiées ne seront pas prises en compte.
- Vous pouvez utiliser le résultat de chaque sous-problème dans la suite de la solution, même si vous ne l'avez pas résolu.
- Vous n'êtes pas obligé·es de suivre les instructions ; toute solution différente de celle proposée sera acceptée, tant qu'elle est bien argumentée.
- Si vous pensez trouver une erreur dans les énoncés, n'hésitez pas à le signaler pendant l'examen.
- Si vous ne comprenez pas un énoncé, n'hésitez pas à demander des clarifications.

Questions à choix multiples

Question 1. (0.25pt) L'application $f : J \times U \to \mathbb{R}^n$ ne vérifie pas les hypothèses du théorème de Cauchy-Lipschitz si elle est seulement :

A. $\mathcal{C}^1$

B. $\mathcal{C}^0$ et localement lipschitzienne en la seconde variable

C. $\mathcal{C}^0$

D. $\mathcal{C}^0$ et lipschitzienne en la seconde variable

Question 2. (0.25pt) Quelle équation différentielle comporte des solutions qui explosent en temps fini ?

A. $x' = x$

B. $x' = x^2$

C. $x' = \sqrt{x}, \quad x > 0$

D. $x' = x - x^2, \quad x > 0$

Question 3. (0.25pt) Donner un exemple de donnée initiale d'un problème de Cauchy pour l'équation

$$x'' + x' + \tan(t)x - \sin(2t) = 0, \quad t \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[.$$

A. $x(0) = 0$

B. $x(0) = 0,\ x'(\frac{\pi}{4}) = 0$

C. $x(0) = x'(0) = 0$

D. $x'(0) = x''(0) = 0$

Question 4. (0.25pt) Indiquer le type du portrait de phase de l'équation :

$$\begin{cases} x' = x + 3y \\ y' = \phantom{x + {}} 5y \end{cases}$$

A. nœud stable

B. nœud instable

C. foyer (spirale)

D. centre (ellipse)

Question 5. (0.25pt) « Soit $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une fonction $\mathcal{C}^1$. Toute solution maximale qui n'est pas globale explose en temps fini. En plus, toute solution maximale uniformément bornée est aussi globale ». Cette assertion est basée sur

A. la formule de Duhamel

B. un argument faux

C. le théorème de Picard

D. le théorème des bouts

Problèmes

Problème 1. (0.75pt) Résoudre l'équation différentielle suivante :

$$x' = \frac{x}{\cos^2(t)}$$

Problème 2. (4pt) Soit l'équation différentielle d'ordre 3 :

$$x^{(3)} - 2x'' + x' = e^t \quad (E)$$

1. Quelle est la régularité d'une solution maximale $x : I \to \mathbb{R}$ de cette équation ?
2. Soit $y : I \to \mathbb{R}$ telle que pour tout $t \in I$, $y(t) = x'(t)$. Réécrire l'équation précedente en y et noter-la (E_y).
   Est-elle linéaire ? Homogène ou inhomogène ? Quel est son ordre ?
3. Écrire l'équation charactéristique associée à l'équation (E_y). A-t-elle des racines simples réelles, complexes, ou a-t-elle une racine double réelle ?
4. Trouver les solutions y de (E_y).
5. Résoudre l'équation (E).

Problème 3. (4pt) Soit $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que pour tout $t \in \mathbb{R}$, on ait $f(t, 1) = 0$ et $f(t, -1) = 0$.

1. Est-ce que f vérifie les hypothèses de Cauchy-Lipschitz ? Qu'est-ce qu'on peut dire sur les solutions maximales de l'équation $x' = f(t, x)$?
2. Quelle est la solution maximale avec condition initiale $x(0) = 1$? Et celle avec $x(0) = -1$? Sont-elles globales ?
3. Montrer que, pour tout $a \in]-1, 1[$, la solution maximale de l'équation

   $$x' = f(t, x) \quad (E)$$

   de condition initiale $x(0) = a$ est globale.
4. On suppose que f est T-périodique par rapport à la première variable. Soit x une solution de (E), et soit $x_T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x_T(t) = x(t + T)$.
   (a) Montrer que x_T est aussi une solution de (E).
   (b) Montrer que $(x(kT))_{k \in \mathbb{N}}$ est une suite monotone.
   (c) En déduire que, si $x(0) = x_T(0)$, alors x est T-périodique.