2. Résultats préliminaires pour la preuve du théorème de C-L.

Ⓐ Cylindre de sécurité.

$\boxed{\text{Déf}}$ Un cylindre $\mathscr{C} =]t_0-\varepsilon, t_0+\varepsilon[\times \overline{B(x_0,R)} \subset J\times U$ est un <u>cylindre de sécurité</u> pour la condition initiale (t_0,x_0) lorsque $\varepsilon \leq \dfrac{R}{\sup_{(t,x)\in\mathscr{C}} \|f(t,x)\|}$.

$\boxed{\text{Rém}}$: Si f vérifie les conditions CL, on peut toujours trouver un cylindre de sécurité ; Soit $V = [t_0-a, t_0+a] \times \overline{B(x_0,R)}$ un compact, $V \subset J\times U$. On fixe $\varepsilon = \min\left(a, \dfrac{R}{\sup_V \|f\|}\right)$. Alors $\mathscr{C} =]t_0-\varepsilon, t_0+\varepsilon[\times \overline{B(x_0,R)} \subset V$ est un cylindre de sécurité, car $\varepsilon \leq \dfrac{R}{\sup_V \|f\|} \leq \dfrac{R}{\sup_{\mathscr{C}} \|f\|}$, étant donné que $\mathscr{C} \subset V$.

$\boxed{\text{Lém}}$: Soit $\mathscr{C} =]t_0-\varepsilon, t_0+\varepsilon[\times \overline{B(x_0,R)}$ un cylindre de sécurité de $(*_f)$. Toute solution $x: I \to U$ de $(*_f)$ de condition initiale (t_0,x_0) avec $I \subset]t_0-\varepsilon, t_0+\varepsilon[$ prend ses valeurs dans la boule ouverte $B(x_0,R)$.

Preuve : On procède par l'absurde. On suppose que $x: I \to U$ sort de $B(x_0,R)$ dans le futur de t_0. Soit

$$T = \inf\{t > t_0,\ t\in I,\ \|x(t)-x_0\| \geq R\}$$

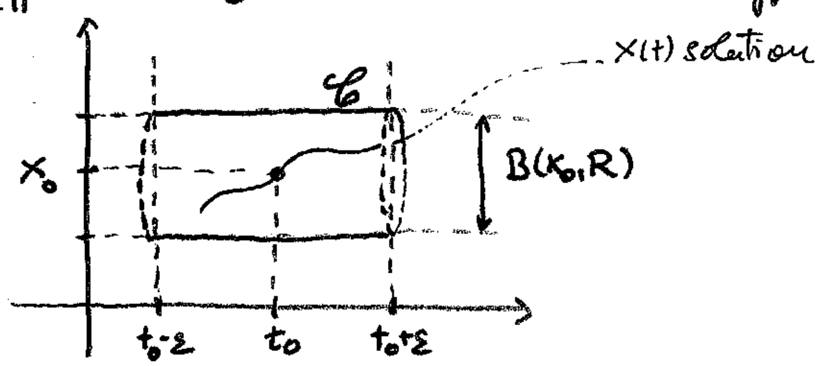
le moment où cela arrive. On a supposé que $T \in I_\varepsilon =]t_0-\varepsilon, t_0+\varepsilon[$.

On a donc $\|x(t)-x_0\| < R$ pour tout $t \in [t_0, T[$ et

$\|x(T)-x_0\| = R$.

Alors $R = \|x(T)-x_0\| \leq \displaystyle\int_{t_0}^{T} \|x'(t)\|\,dt \leq \int_{t_0}^{T} \|f(t,x(t))\|\,dt \leq \varepsilon \sup_{\mathscr{C}} \|f\|$.

et donc $T \geq t_0 + \dfrac{R}{\sup_{\mathscr{C}} \|f\|} \geq t_0+\varepsilon$. Contradiction, car on a supposé que $T \in]t_0-\varepsilon, t_0+\varepsilon[$.



(B) Lem : Pour $I \subset J$ un intervalle t.q. $t_0 \in I$, il y a une equivalence entre :

1) $x \in \mathcal{C}^1(I, U)$ solution de $(*_f)$ à donnée initiale (t_0, x_0).

2) $x \in \mathcal{C}^0(I, U)$ et pour tout $t \in I$,

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(u, x(u))\, du \qquad (**_f)$$

$(**_f)$ s'appelle formule intégrale du problème de Cauchy.

Preuve : $1) \Rightarrow 2)$ $x'(t) = f(t, x(t))$ implique, par intégration entre t et t_0, $x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(u, x(u))\, du$.

$2) \Rightarrow 1)$ $f, x \in \mathcal{C}^0$ implique $t \mapsto f(t, x(t))$ de classe $\mathcal{C}^0$, et donc une primitive $x_0 + \int_{t_0}^{t} f(u, x(u))\, du$ est de classe $\mathcal{C}^1$. En dérivant $(**_f)$, on obtient $x'(t) = f(t, x(t))$.

(C) Rappel : Théorème du point fixe de Picard. Soit (E, d) un espace de Banach (~~normé~~ espace vectoriel normé avec une distance complète $d(x,y) = \|x - y\|_E$). Si $\varphi : E \to E$ est strictement contractante (α-lipschitzienne, où $\alpha \in]0,1[$), alors elle admet un point fixe ($x \in E$ t.q. $\varphi(x) = x$).

Rem : * $\mathcal{C}_b^0(I; \mathbb{R}^n)$ l'espace des fonctions continues bornées avec la norme $\|x\|_E = \sup_{t \in I} \|x(t)\|$ et la distance d

$$d(x,y) = \|x - y\|_E$$

* Si (E, d) espace de Banach et $F \subset E$ un fermé dans E, alors (F, d) est un espace de Banach.

3. Preuve du théorème de Cauchy-Lipschitz

- Soit $(t_0, x_0) \in J \times U$ une donnée initiale. Par les résultats de la section $\cancel{B}$, on peut choisir un cylindre de sécurité.

  $\mathcal{C} =]t_0-\varepsilon, t_0+\varepsilon[\times \overline{B(x_0, R)}$.

  Pour tout $(t,x) \in \overline{\mathcal{C}} = [t_0-\varepsilon, t_0+\varepsilon] \times \overline{B(x_0,R)}$, on note $V_{(t,x)}$ un voisinage dans lequel f est lipschitzienne (de constante qui dépend de (t,x)).

  Comme $\overline{\mathcal{C}}$ est compact, il existe un recouvrement fini de $\overline{\mathcal{C}}$: $V(t_i, x_i)$ avec constante de Lipschitz k_i.

  On se rend compte que $f|_{\overline{\mathcal{C}}}$ est lipschitzienne de constante $k = \min(k_i)$.

  Pour finir, on choisit $\varepsilon \leq \frac{R}{M}$ et $< \frac{1}{K}$ ~~$\varepsilon = \min\left(\frac{R}{M}, \frac{1}{K}\right)$~~ ; $\mathcal{C} =]t_0-\varepsilon, t_0+\varepsilon[\times \overline{B(x_0,R)}$ reste un cylindre de sécurité.

- On définit l'ensemble $\Gamma := \{x : I_\varepsilon \to \overline{B(x_0,R)}, x \text{ continue}\}$

  Or $\Gamma \subset \mathcal{C}^0_b(I_\varepsilon, \mathbb{R}^n)$ fermé, car $\Gamma = \bigcap_{t \in I_\varepsilon} \Phi_t^{-1}(\overline{B(x_0,R)})$

  où $\left[\begin{array}{rcl} \Phi_t : \mathcal{C}^0_b(I_\varepsilon, \mathbb{R}^n) & \to & \mathbb{R}^n \\ f & \mapsto & f(t) \end{array}\right]$ continue. Donc (Γ, d) un espace de Banach.

- On définit l'application $\Psi : \Gamma \to \Gamma$, où $\Psi(x)(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(u, x(u))\,du$.

  Alors elle est continue sur I_ε et $\operatorname{Im}(\Psi(x)) \subset \overline{B(x_0,R)}$:

  $$\forall t \in I_\varepsilon, \ \|\Psi(x(t)) - x_0\| \leq \left|\int_{t_0}^{t} \|f(u, x(u))\|\,du\right| \leq \varepsilon M \leq R.$$

• Il nous reste de montrer que Ψ est contractante.

Soient $x, y \in \Gamma$.

$$d(\Psi(x), \Psi(y)) = \sup_{t \in I_\varepsilon} \left\| \int_{t_0}^{t} f(u, x(u)) - f(u, y(u))\, du \right\|$$

$$\leq \varepsilon K\, d(x, y)$$

On note $\alpha := \varepsilon K$. Comme $\varepsilon < \frac{1}{K}$, alors $\alpha \in]0, 1[$.

Donc Ψ est α-lipschitzienne (et contractante).

• On conclut que Ψ a un point fixe $x \in \Gamma$. Donc il existe $x \in \mathcal{C}^0$ telle que $x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(u, x(u))\, du$.

Par le lemme de la section B, x est une solution de $(*_f)$ à condition initiale (t_0, x_0).