Introduction aux équations différentielles. Équations linéaires.

Équations différentielles du premier ordre

Exercice 1. Résoudre les équations différentielles homogènes suivantes.

1. $2x' - 3x = 0$ sur $\mathbb{R}$
2. $x' - tx = 0$ sur $\mathbb{R}$
3. $(1+t^2)x' + 2tx = 0$ sur $\mathbb{R}$
4. $x' - \dfrac{\sin(t)}{2+\cos(t)}x = 0$ sur $\mathbb{R}$

Exercice 2. Résoudre les équations différentielles suivantes sur l'intervalle spécifié.

1. $x' - 3x = 2 \quad$ sur $\mathbb{R}$
2. $x' + x = \sin(t)$ sur $\mathbb{R}$
3. $x' + x = 1 + t + te^{-t} + \sin(t) \quad$ sur $\mathbb{R}$
4. $x' - 2tx = \sinh(t) - 2t\cosh(t) \quad$ sur $\mathbb{R}$
5. $(1+t^2)x' - tx = (1+t^2)$ sur $\mathbb{R}$
6. $x' + \tan(t)x - \sin(2t) = 0 \quad$ sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$

Exercice 3. Déterminer les solutions complexes, puis réelles du système différentiel :

$$\begin{cases} x' = & x + z \\ y' = & -y - z \\ z' = & 2y + z \end{cases}$$

Indication : diagonaliser la matrice pour trouver les solutions complexes et prener les parties réelles pour trouver les solutions réelles.

Exercice 4. Résoudre les problèmes de Cauchy suivants

1. $x' + 2tx = te^{-t^2}$ sur $\mathbb{R}$, avec $x(0) = 1$.
2. $(1-t)x' - (1+2t)x = 1 + 2t$ sur $]-1, 1[$, et avec $x(0) = 0$.
3. $\cos(t)x' + \sin(t)x = 1$ sur $]-\pi/2, \pi/2[$, avec $x(0) = 2$.

Exercice 5 (Équation fonctionnelle 1)**.** Déterminer l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivables qui vérifient, pour tout $(s,t) \in \mathbb{R}^2$, $f(s+t) = f(s)f(t)$.

Exercice 6 (Équation fonctionnelle 2)**.** Décrire toutes les fonctions $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ continues vérifiant
$$\forall x \in [0, +\infty[,\ 2xf(x) = 3\int_0^x f(t)dt.$$

Exercice 7. On considère une fonction $a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue et T-périodique, pour un certain $T > 0$. On pose $\bar{a} = \frac{1}{T}\int_0^T a(t)dt$ la valeur moyenne de a. Montrer que si f est une solution de l'équation différentielle
$$x' = a(t)x$$
sur $\mathbb{R}$, alors $t \mapsto e^{-\bar{a}t}f(t)$ est T-périodique.

Équations différentielles du deuxième ordre

Exercice 8. Résoudre les équations différentielles homogènes suivantes d'inconnue x à valeurs dans $\mathbb{C}$, puis dans $\mathbb{R}$.

1. $x'' - 3x' + 2x = 0$ sur $\mathbb{R}$
2. $x'' - 4x' + 4x = 0$ sur $\mathbb{R}$
3. $x'' + 2x' + 2x = 0$ sur $\mathbb{R}$

Exercice 9. Résoudre les équations différentielles suivantes d'inconnue x à valeurs dans $\mathbb{R}$.

1. $x'' + 2x' + x = te^t$ sur $\mathbb{R}$
2. $x'' + x = \tan^2 t$ sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$
3. $x'' - 4x' + 5x = \cos(2t) - 2\sin(2t)$ sur $\mathbb{R}$
4. $x'' + 9x = \cos(2t)e^t$ sur $\mathbb{R}$
5. $x'' - 3x' + 2x = (t^2 + 1)e^t$ sur $\mathbb{R}$
6. $t^2x'' - 2x = 3t^2$ sur $\mathbb{R}^+$

Exercice 10. Déterminer les solutions (x, y) définies sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}^2$ du système différentiel suivant :
$$\begin{cases} x'' + x' + 4y' - x - 3y & = 0 \\ y'' - 3y' + x + 3y & = 0 \end{cases}$$

Exercice 11. Commenter la résolution suivante :

« On considère l'équation différentielle d'inconnue x, $t^2x(t)'' + tx(t)' = 0$ sur l'intervalle $]0, +\infty[$. L'équation caractéristique est $t^2r^2 + tr = 0$, dont les racines sont $r = 0$ et $r = -1/t$. On en déduit que l'ensemble des solutions est
$$\mathcal{S} = \{t \mapsto \alpha + \beta\exp(-1/t),\ (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2\}. \text{ »}$$

Exercice 12. Soit $m \in \mathbb{R}$. En fonction de la valeur de m, trouver les solutions réelles de l'équation différentielle
$$x'' - 2x' + mx = \cos(t) \qquad (E_m)$$

Exercice 13 (Équation fonctionnelle 1)**.** Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivables telles que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) + f(-x) = e^x.$$

Exercice 14 (Équation fonctionnelle 2)**.** Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Trouver toutes les fonctions f définies et dérivables sur $\mathbb{R}$, et telles que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) = f(\lambda - x).$$

Exercice 15. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle

$$(t^2 + 1)x'' + (t^2 - 2t + 1)x' - 2tx = 0$$

en introduisant la fonction $y = x' + x$.

Exercice 16 (Un changement de variable pour l'équation d'Euler.)**.** On cherche à résoudre l'équation différentielle

$$x'' + \frac{1}{2t^2}x = 0 \qquad (E)$$

sur $]0, +\infty[$. Pour ce faire, on définit, pour $t \in \mathbb{R}$, $y(t) = x(e^t)e^{-t/2}$.

1. Soit $t > 0$. Exprimer $x(t)$ en fonction de $y(\ln(t))$.
2. En déduire que la fonction y vérifie une équation différentielle (E') d'ordre 2 à coefficients constants.
3. Résoudre (E'), puis résoudre (E).

Une équation du type Euler d'ordre n est définie par

$$t^n x^{(n)} + a_{n-1}t^{n-1}x^{(n-1)} + \cdots + a_0 x = 0$$

où $a_i \in \mathbb{C}$ et $i \in [[0, n-1]]$. Pensez à comment réduire cette équation à une équation linéaire.

Exercice 17 (Équation fonctionelle 3)**.** Déterminer les fonctions $f :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ dérivables qui vérifient $f'(x) = f(1/x)$ pour tout $x > 0$.

Exercice 18 (e3a PSI 2019)**.** On considère l'équation différentielle d'ordre 3

$$x^{(3)} - x = 0. \qquad (E_1)$$

1. Soit f une solution de (E_1). On pose $g = f'' + f' + f$. Déterminer une équation différentielle du premier ordre (E_2) vérifiée par g.
2. Résoudre (E_2).
3. En déduire les solutions de (E_1).

Dessins

Exercice 19. Soit l'équation différentielle définie sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$

$$x' = f(t, x), \tag{$*_f$}$$

où $f(t, x) = x(x - t)$.

1. Dessinez l'isocline nulle $I_0 = \{(t, x), f(t, x) = 0\}$.
2. À l'aide des éléments de contact, esquisser quelques trajectoires de solutions de l'équation $(*_f)$ dans les régions de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ détérminées par I_0.

Exercice 20. Esquisser le portrait de phase des équations linéaires autonomes associées aux matrices

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} -3 & -10 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}, \quad A_4 = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}.$$

On commence par indiquer les orbites remarquables.

Problèmes

Exercice 21 (Solutions d'une équations différentielle d'ordre n à coefficients constants)**.** Pour tout polynôme complexe $P = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i$, $a_n \neq 0$, et pour toute fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ de classe $\mathcal{C}^n$, on note

$$P(D)(f) = \sum_{i=0}^{n} a_i f^{(i)},$$

où D est l'opérateur de dérivation.

Pour tout polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$, on note $\mathcal{S}_P$ l'espace des solutions de l'équation différentielle $P(D)(x) = 0$.

1. Si $P_1, \dots, P_k \in \mathbb{C}[X]$ sont des polynômes premiers entre eux deux à deux, montrer que $\mathcal{S}_{\mathbb{P}_1 \dots P_k} = \mathcal{S}_{P_1} \oplus \cdots \oplus \mathcal{S}_{P_k}$.
2. Si $P_n(X) = (X - \alpha)^n$, déterminer la forme des solutions de l'équation différentielle $P_n(D)(x) = 0$.
3. En déduire, pour tout $P \in \mathbb{C}[X]$ $(deg(P) \geqslant 1)$, la forme des solutions de l'équation différentielle $P(D)(x) = 0$.

Exercice 22 (Théorème de Floquet)**.** On considère un système différentiel sur $\mathbb{C}^n$

$$X' = A(t)X, \tag{S}$$

où $A : \mathbb{R} \to \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est une fonction continue T-périodique.

1. Montrer que (S) admet une solution V non nulle telle que

$$\exists \lambda \in \mathbb{C}, \forall t \in \mathbb{R}, \quad V(t+T) = \lambda V(t).$$

2. On considère n solutions $V_1, \ldots V_n$ de (S) linéairement indépendantes. En notant $M(t)$ la matrice carrée dont les vecteurs colonnes sont $V_1(t), \ldots V_n(t)$, montrer que

$$\exists C \in GL_n(\mathbb{C}), \forall t \in \mathbb{R}, \quad M(t+T) = M(t)C.$$