Théorème de Cauchy-Lipschitz

Équations remarquables

Exercice 1. Soit $f : \mathbb{R} \times U \to \mathbb{R}$ l'application $f(t,x) = x^\alpha$, pour $\alpha \in \mathbb{R}$. On considère le problème de Cauchy

$$\begin{cases} x'(t) = f(t,x) \\ x(0) = x_0. \end{cases}$$

On cherche des solutions $x : I \to U$ pour des différentes valeurs de α et de U. On essaie chaque fois de donner des solutions maximales.

1. Faire un tableau des domaines de définition de f et des sous-ensembles où les hypothèses de Cauchy-Lipschitz sont vérifiées pour $\alpha > 1$, $\alpha = 1$, $\alpha \in]0,1[$, $\alpha = 0$ et $\alpha < 0$.
2. Soit $\alpha = 0$. Montrer que pour tout $x_0 \in \mathbb{R}$, le problème de Cauchy admet une unique solution $x \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R};\mathbb{R})$.
3. Soit $\alpha = 1$.
   (a) Montrer que pour $x_0 > 0$ et $U = \mathbb{R}_+^*$, le problème de Cauchy admet une unique solution strictement positive et chercher sa forme explicite.
   (b) Montrer que pour $x_0 \in \mathbb{R}$, le problème de Cauchy admet une unique solution $x \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R};\mathbb{R})$.
4. Soit $\alpha \in \mathbb{R}\setminus\{1\}$. Pour $x_0 > 0$, chercher une solution locale explicite dans un voisinage de $t = 0$.
5. Soit $\alpha < 0$.
   (a) Pour $x_0 > 0$, chercher une solution qui prend aussi des valeurs négatives aurait-il un sens ? Répondre sans chercher des solutions explicites.
   (b) Pour $x_0 > 0$ et $U = \mathbb{R}_+^*$, chercher une solution explicite du problème de Cauchy. Dessiner ces solutions pour $\alpha = -1$.
6. Soit $\alpha > 1$. Pour $x_0 > 0$, montrer que les solutions maximales du problème de Cauchy explosent en temps fini. Preciser le temps $t^+ > 0$ maximal dans le futur. Dessiner ces solutions pour $\alpha = 2$.
7. Soit $\alpha \in]0,1[$. Cette fois, soit $f(t,x) = |x|^\alpha$. On étudie le problème de Cauchy de données initiales (t_0, x_0)

(a) Trouver le domaine de f et l'ensemble où les hypothèses de Cauchy-Lipschitz sont vérifiées.

(b) Pour $x_0 > 0$ et $t_0 = 0$, montrer que le problème de Cauchy admet une unique solution. est une solution.

(c) Pour tout $t_0 \in \mathbb{R}$ et $x_0 = 0$, montrer que le problème de Cauchy admet une infinité des solutions. Dessiner plusieurs solutions pour $\alpha = 1/2$.

8. Comparer la croissance dans le futur des solutions de $\alpha = 2$, $\alpha = 1$ et $\alpha = -1$. Généraliser ce résultat pour $\alpha > 1$, $\alpha = 1$, $\alpha < 1$.

Exercice 2 (Dynamique d'une population)**.** On s'intèresse à l'évolution d'une population. On désigne par $x(t)$ le "nombre" d'individus et $k(t,x) = \frac{x'(t)}{x(t)}$ le taux de croissance au temps t. On pose la donnée initiale $(0, x_0)$, avec $x_0 > 0$. Étudier le comportement dans $t \geqslant 0$ des solutions $x : I \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ dans les cas suivants :

1. k est constant,
2. $k = x$,
3. $k = a - bx$ avec $a, b > 0$.

Exercice 3 (Bernoulli, Riccati)**.** Résoudre les équations différentielles suivantes. On précisera chaque fois les intervalles maximaux et le raccords de solutions.

1. Les équations du type Bernoulli prennent la forme $x' = a(t)x + b(t)x^\alpha$, où $a, b \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.

   Les cas $\alpha = 0$ ou 1 correspondent aux équations linéaires, qu'on résoud en utilisant les méthodes qu'on connait déjà.

   (a) $x' = x - \sqrt{x}$,

   (b) $x' = \dfrac{x}{2t} + \dfrac{1}{2tx}$.

   Indication : Poser $y = x^{1-\alpha}$.

2. Les équations du type Riccati prennent la forme $x' = a(t)x^2 + b(t)x + c(t)$, où $a, b, c \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

   (a) $x' = x^2 - tx + 1 \quad x_p(t) = t$,

   (b) $(1 + t^3)x' = x^2 + t^2x + 2t \quad x_p(t) = t^2$.

   Indication : On transforme en équation de Bernoulli en posant $x = x_p(t) + y$, où x_p est une solution particulière.

Temps de vie, solutions maximales, estimations et comparaisons

---

Exercice 4 (Hypothèses de Cauchy-Lipschitz)**.** Soit $f : J \times U \to \mathbb{R}^n$. Montrer que si l'application f est de classe $\mathcal{C}^1$ dans un ouvert $\Omega \subset J \times U$, alors elle vérifie les hypothèses de Cauchy-Lipschitz dans Ω.

Exercice 5 (Équations à variables séparées)**.** Soitent $a : J \to \mathbb{R}^n$ et $b : U \to \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ deux fonctions continues. On s'intéresse à l'équation différentielle $x' = f(t,x)$, où $f(t,x) = \frac{a(t)}{b(x)}$.

1. Soit $t_0 \in J$. Soient A et B deux primitives de a, respectivement b. Montrer que pour tout solution $x : I \to U$, $B(x(t)) = A(t) + C$, où $C \in \mathbb{R}$ une constante.
2. Trouver les solutions maximales des équations suivantes :

(a) $x' = \tan(t)x$ (b) $x' = t\sqrt{1-x^2}$ (c) $x' = 2t^2x^{1/2}$.

Exercice 6 (Zéros isolés)**.** Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ une application de classe $\mathcal{C}^1$. On s'intéresse à l'équation

$$x'' = f(t, x, x').$$

On suppose que la solution indentiquement nulle sur $\mathbb{R}$ est une solution. Montrer que toute solution non-identiquement nulle a ses zéros isolés.

Exercice 7 (Comparaison des solutions)**.** Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ et $y, z : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux solutions de l'équation différentielle $x' = f(t,x)$. On suppose qu'il existe $t_0 \in \mathbb{R}$ tel que $y(t_0) < z(t_0)$. Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $y(t) < z(t)$.

Exercice 8. On considère la solution maximale $x :]t^-, t^+[\to \mathbb{R}$ du problème de Cauchy

$$\begin{cases} x'(t) = x^2 - t \\ x(0) = 0. \end{cases}$$

1. Expliquer pourquoi $x \in \mathcal{C}^\infty(]t^-, t^+[; \mathbb{R})$.
2. Donner un développement limité à l'ordre 2 de $x(t)$ en $t = 0$ et en déduire qu'il existe $\delta \in]0, t^+[$ tel que $x^2(t) < t$ pour $t \in [0, \delta]$.
3. Montrer $x^2(t) < t$ pour tout $t \in]0, t^+[$.
4. Montrer que $t^+ = +\infty$.

Exercice 9 (Solutions périodiques)**.** Soit $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une appliction de classe $\mathcal{C}^1$ et soit $T > 0$ tels que pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$f(t + T, \cdot) = f(t, \cdot).$$

Soit $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une solution. On note $x_T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction telle que $x_T(t) = x(t + T)$.

1. Montrer que x_T est aussi une solution.
2. Montrer que la suite $(x(kT))_{k\in\mathbb{N}}$ est strictement monotone ou constante.
3. Si la suite est constante, montrer que la solution est T-périodique.

Exercice 10 (Point limite pour une équation autonome)**.** Soit $x' = f(x)$ une équation différentielle autonome, avec $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ qui vérifie les hypothèses de Cauchy-Lipschitz. Soit $x :]t^-, t^+[\to U$ une solution maximale. On suppose que lorsque $t \to t^+$, $x(t) \to z^+ \in U$.

Montrer que $t^+ = +\infty$ et $f(z^+) = 0$. Autrement dit, la solution est globale dans le futur et z_+ est un point singulier (f s'annule en z_+).

Exercice 11 (Lemme de Gronwall, forme intégrale)**.** Soient $x : [a, b] \to \mathbb{R}$, $\varphi : [a, b] \to R_+$ des fonctions continues et $c \geqslant 0$ une constante positive. On suppose que, pour tout $t \in [a, b]$, on a la majoration

$$x(t) \leqslant c \int_a^t \varphi(s)x(s)\,\mathrm{d}s.$$

Montrer que pour tout $t \in [a, b]$, on peut majorer $x(t)$ par

$$x(t) \leqslant c \exp\left(\int_a^t \varphi(s)\,\mathrm{d}s\right).$$

Exercice 12 (Existence et unicité pour équations linéaires)**.** Soient $J \ni t \to A(t) \in M_n\mathbb{R}$ et $J \ni t \to B(t) \in \mathbb{R}^n$ continues. Montrer que le problème de Cauchy

$$\begin{cases} X'(t) = A(t)X(t) + B(t) \\ X(t_0) = X_0 \end{cases}$$

où $(t_0, X_0) \in J \times \mathbb{R}^n$ adment une unique solution maximale, et en plus, qu'elle est globale.

Exercice 13. (Coordonnées polaires) On considère le système différentiel :

$$\begin{cases} x' = x - y(x^2 + y^2) \\ y' = y + x(x^2 + y^2) \end{cases}$$

1. Vérifier que le système possédent une symmétrique par rotation.
2. Résoudre le système différentiel en passant en coordonnées polaires.
3. Tracer son portrait de phase.

Exercice 14 (Équations perturbées)**.** Soit $f : J \times U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une application qui vérifie les hypotèses de Cauchy-Lipschitz. Soit $x_0 : [a, b] \to U \subset \mathbb{R}^n$ la restriction à un sous-intervalle compact de son intervalle de définition d'une solution du problème de Cauchy

$$\begin{cases} x_0' = f(t, x_0) \\ x_0(s) = y, \end{cases}$$

où $(s, y) \in J \times \mathbb{R}^n$. Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}^n$, on considère $x_\lambda : I_\lambda \to \mathbb{R}^n$ la solution du problème de Cauchy

$$\begin{cases} x_\lambda' = f(t, x_\lambda) + \lambda \\ x_\lambda(s) = y, \end{cases}$$

de même conditions initiales. Il s'agit d'une équation perturbée.

1. Montrer que pour $\lambda \in \mathbb{R}^n$ suffissament petit, on a $[a, b] \subset I_\lambda$.
2. Montrer que $x_\lambda \to x_0$ uniformément sur $[a, b]$ lorsque $\lambda \to 0$.

Exercice 15 (Hamiltonien)**.** On considère une particule dans $\mathbb{R}^n$ de masse $m > 0$ soumise à un champ de force dérivant d'un potentiel $V \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^n;\mathbb{R})$. Cela veut dire que la force appliquée à la particule au point x est donnée par

$$\vec{F}(x) = -\nabla_x V(x) = -\begin{pmatrix} \frac{\partial V}{\partial x_1}(x) \\ \vdots \\ \frac{\partial V}{\partial x_n}(x) \end{pmatrix}.$$

L'équation fondamentale de la mécanique est donc

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -\nabla_x V(x)\,.$$

On note $p = mv = m\frac{dx}{dt}$ la quantité de mouvement de la particule et $\mathcal{E}(x,p) = \frac{||p||^2}{2m} + V(x) = \frac{m||v||^2}{2} + V(x)$ l'énergie mécanique de la particule.

1. Montrer que l'équation fondamentale de la mécanique est équivalent au système

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \frac{1}{m}p = \nabla_p \mathcal{E}(x,p) \\ \frac{dp}{dt} = -\nabla V(x) = -\nabla_x \mathcal{E}(x,p). \end{cases}$$

2. On note $H(x,p) = \begin{pmatrix} \nabla_p \mathcal{E} \\ -\nabla_x \mathcal{E} \end{pmatrix}$, montrer que sous l'hypothèse $V \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^n;\mathbb{R})$, le théorème de Cauchy-Lipschitz s'applique avec $U = \mathbb{R}^n_x \times \mathbb{R}^n_p$.
3. Vérifier que si $I \ni t \mapsto (x(t), p(t))$ est une solution du problème de Cauchy avec donnée initiale $(x(0), p(0)) = (x_0, p_0)$, on a conservation de l'énergie le long de la trajectoire
$$\forall t \in I\,,\quad \mathcal{E}(x(t), p(t)) = \mathcal{E}(x_0, p_0)\,.$$
4. On suppose $\lim_{x\to\infty} V(x) = +\infty$, montrer que pour toute donnée initiale (x_0, p_0) l'intervalle maximal est $\mathbb{R}$.
5. En dimension 1 et dans le cas $V(x) = kx^2$ avec $k > 0$ (on se placera pour commencer dans le cas $k = m$) donner la trajectoire partant de (x_0, p_0).

Étude qualitative en dimension 1

Exercice 16. On étudie l'équation différentielle $x'(t) = f(t, x(t))$, où $f(t,x) = x^3 - \sin(2\pi t)$ (E).

1. (a) Dessiner une isocline I_0 et indiquer le signe de f dans les régions qu'elle délimite.
   (b) Pour quelles valeurs $c \in \mathbb{R}$ la fonction constante $h_c(t) = c$ est-elle une sur-solution, respectivement une sous-solution.

2. Soit $x : I \to \mathbb{R}$ une solution maximale. On note $t^- = \inf I \in [-\infty, \infty[$.
   (a) Montrer (par l'absurde) qu'il existe $t \in I$ avec $x(t) \leqslant 1$.
   (b) Montrer qu'il existe $t \in I$ pour lequel $x(t) \geqslant -1$.
   (c) En déduire que toutes les solutions maximales sont globales dans le passé.
3. (a) Esquisser le portrait de phase de l'équation différentielle $x'(t) = \frac{1}{4}x(t)$ (H).
   (b) Soient y et z deux solutions maximales de (E). Montrer que $\lim_{t\to\infty} y(t) - z(t) = 0$. (*Indication :* Utiliser le fait que pour $a < b$, $\frac{1}{4}(b-a)^3 \leqslant b^3 - a^3$).
4. (a) Soient x_n et z_n les solutions maximales de (E) de conditions initiales $y_n(n) = 1$ et $z_n(n) = -1$. Montrer que, pour tout $t \leqslant n$, on a $y_n(t) = y_0(t-n)$ et $z_n(t) = z_0(t-n)$.
   (b) Montrer que (E) admet une unique solution maximale $w : \mathbb{R} \to R$ à valeurs dans $[-1, 1]$.
   (c) Montrer que w est périodique de période 1.
5. Soit $x : I \to \mathbb{R}$ une solution maximale de (E) distincte de w. Est-elle globale dans le futur ?