Formes différentielles. Intégrales premières.

Temps de vie. Études qualitatives en dimension 1. (continuation)

Exercice 1. Soient $T > 0$, une application $A : \mathbb{R} \to M_n\mathbb{R}$ continue T-périodique, et $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ de classe $\mathcal{C}^1$. On suppose que pour tous $(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, on a $f(t+T, x) = f(t, x)$, et qu'il existe une fonction continue $h : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ avec $\lim_{s\to\infty} h(s) = 0$ et telle que $||f(t, x)|| \leqslant h(||x||)||x||$.
Soit l'équation différentielle (E) $x'(t) = A(t)x(t) + f(t, x(t))$.

1. Montrer que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une constante $M_\varepsilon > 0$ telle que, pour tous $(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, on ait $||f(t, x)|| \leqslant \varepsilon||x|| + M_\varepsilon$.
2. Démontrer que les solutions maximales de (E) sont globales.

Exercice 2. On considère l'équation différentielle (E) $x' = f(t, x)$ sur le domaine $J \times U =]0, \infty[\times\mathbb{R}$, où

$$f(t, x) = (t - x)(x - \frac{1}{t^2}), \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}.$$

1. Etablir un régionnement de $J \times U$ selon le signe de f.
2. Identifier une sur-solution ainsi qu'une sous-solution pour (E).
3. Soient $t_0 \geqslant 1$ et $x :]t^-, t^+[\to U$ maximale de condition initialle $1/(t_0)^2 \leqslant x(t_0) \leqslant t_0$.
   (a) La solution x est-elle globale dans le futur ?
   (b) Déterminer sa limite lorsque t tend vers t^+.

Formes différentielles

Exercice 3. Nous étudions la forme différentielle

$$\omega = \frac{-y}{x^2 + y^2}dx + \frac{x}{x^2 + y^2}dy.$$

1. Vérifier que la forme différentielle ω appartient à $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2\setminus\{(0, 0)\} ; \mathbb{R})$ et qu'elle est fermée.

2. Exprimer dx, dy en coordonnées polaires avec $(x, y) = (r\cos(\theta), r\sin(\theta))$, puis en déduire une expression de ω en coordonnées polaires.

3. En déduire que ω est exacte sur tout domaine $\mathbb{R}^2 \backslash \Delta_{\theta_0}$, où

$$\Delta_{\theta_0} = \{(r\cos(\theta_0), r\sin(\theta_0)),\ r \geqslant 0\}\,.$$

4. Donner la forme de F telle que $dF = \omega$ en coordonnées polaires sur $\mathbb{R}^2 \backslash \Delta_{\theta_0}$. En déduire que ω n'est pas exacte sur $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$.

5. Montrer que $F(x, y) = 2\arctan(\frac{\sqrt{x^2+y^2}-x}{y})$ sur $\mathbb{R}^2 \backslash \Delta_\pi$ dans les coordonnées (x, y). (Rappel : $\tan(t) = \frac{\tan(t/2)}{1-\tan(t/2)^2}$).

Exercice 4. Soit la forme différentielle

$$\omega = (x^2 - y^2 - 1)dx - 2xydy.$$

1. Montrer que ω est fermée.
2. Sans calcul, expliquer pourquoi il existe $F \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2; \mathbb{R})$ telle que $dF = \omega$.
3. Calculer F telle que $F(0, 0) = 0$.
4. Donner les solutions de $t^2 - y^2 - 1 - 2tyy' = 0$.

Exercice 5. Soit la forme différentielle

$$\omega = (x^2 + y^4)dx + v(x, y)dy$$

où v est une fonction continue sur $\mathbb{R}^2$ telle que $v(0, y) = 2y$ pour tout $y \in \mathbb{R}$.

1. Chercher v telle que ω soit exacte.
2. Déterminer F telle que $dF = \omega$.
3. Etudier le problème de Cauchy $t^2 + y^4 + v(t, y)y' = 0$ avec $y(0) = 1$ au voisinage de $t = 0$.

Lemme 1. Soit $\omega : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ une forme différentielle.

1. Soit γ un chemin $\mathcal{C}^1$ par morceaux dans U.
   (a) Montrer que $\int_\gamma \omega$ ne dépend pas du paramétrage du chemin γ.
   (b) Montrer que $\int_\gamma \omega$ ne dépend pas du choix des coordonnées.
2. On suppose que ω est fermée.
   (a) Montrer que le fait d'être fermée ne dépend pas du choix des coordonnées.

(b) Si en plus U est un ouvert étoilé. Soit $x_0, x_1 \in U$. Montrer que pour tout $h \in \mathbb{R}^2$ avec $||h||$ suffissament petit,

$$\int_{[x_0,x_1+h]} \omega - \int_{[x_0,x_1]} \omega = \int_{[x_1,x_1+h]} \omega.$$

Intégrales premières

Exercice 6 (Lotka-Volterra)**.** Soit $f : U \to \mathbb{R}^2$, où $U = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$ et

$$f(x, y) = (x(y-1), y(x-1)).$$

On considère le système différentiel

$$X' = f(X), \quad X \in U.$$

Ce sytème (qui date de 1920) modélise le comportement d'un système écologique à deux espèces pour lequel x et y mesurent respoectivement la population des prédateurs et des proies.

1. Déterminer les points singuliers de f (où f s'annulle).
2. Mintrer que le système admet pour intégrale première la fonction définie par $h : U \to \mathbb{R}$, $h(x, y) = (\ln x - x) + (\ln y - y)$.
3. En déduire que les solutions su système dont périodiques, et esquisser son portrait de phase.

Exercice 7. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, où

$$f(x, y) = (y, 2xy).$$

On analyse le système

$$X' = f(X), \quad X \in \mathbb{R}^2.$$

1. Trouver les points singuliers du système (où f s'annule).
2. Montrer que $h(x, y) = x^2 - y$ est une intégrale première du système.
3. Montrer que les orbites de X sont soit des points, soit des paraboles $x^2 - y = cste$.
4. Esquisser un portrait de phase.