Feuille de TD 1 : Rappels de calcul intégral

Exercice 1 Existe-t-il une fonction g intégrable sur $\mathbb{R}$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et presque tout $x \in \mathbb{R}$, $n\mathrm{e}^{-n|x|} \leq g(x)$?

Exercice 2
1. Montrer que, pour tout $u \in [0, 1[$, $u + \log(1 - u) \leq 0$.
2. Soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$. Montrer que, pour $\lambda \in \mathbb{R}$ suffisamment grand, on peut écrire

$$\int_{\mathbb{R}} \exp\left[\lambda^3 \log\left(1 - \frac{y^2}{\lambda^3}\right)\right] \varphi\left(\frac{y}{\lambda}\right) \mathrm{d}y$$

et calculer la limite de ces intégrales lorsque $\lambda \to \infty$.

Exercice 3 Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Montrer que, dans $\mathbb{R}^d$,
1. $\int_{B(0,1)} \frac{1}{\|x\|^\alpha} \mathrm{d}x$ est convergente si et seulement si $\alpha < d$.
2. $\int_{\mathbb{R}^d \setminus B(0,1)} \frac{1}{\|x\|^\alpha} \mathrm{d}x$ est convergente si et seulement si $\alpha > d$.

Exercice 4 Soit $a > 0$. On pose pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$F(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}tx} \mathrm{e}^{-at^2} \mathrm{d}t.$$

1. Montrer que F est bien définie sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$F'(x) = -\frac{x}{2a} F(x).$$

3. En déduire que pour tout réel x, $F(x) = F(0)\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{4a}}$ puis que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ F(x) = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{4a}}.$$

On rappelle que $\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-u^2} \mathrm{d}u = \sqrt{\pi}$.

Exercice 5 Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$. On considère l'application

$$Tf\ :\ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \int_0^1 f(x-y)\mathrm{d}y \end{array}.$$

1. Montrer que, si f est continue à support compact, Tf est continue.
2. Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues à support compact qui converge vers f dans $L^1(\mathbb{R})$. Montrer que $(Tf_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers Tf uniformément sur $\mathbb{R}$. En déduire que Tf est continue sur $\mathbb{R}$.
3. En déduire que le produit de convolution sur $L^1(\mathbb{R})$ n'admet pas d'élément unité.

Exercice 6 On note Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$.
1. Soit $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions de $C_0^\infty(\Omega)$, et $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$. Rappeler la définition de "$(\varphi_n)_n$ converge vers φ dans $C_0^\infty(\Omega)$".
2. Soit $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$, non nulle, et $a \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$. Soit

$$\chi_n(x) = e^{-n|x|^2} \chi(x - na).$$

Montrer que $(\chi_n)_n$ converge vers la fonction constante nulle uniformément dans $\mathbb{R}^d$. Est-ce que $(\chi_n)_n$ converge dans $C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$?

3. Soit $B(0, 1)$ la boule unité ouverte de $\mathbb{R}^d$ et ρ une fonction pic sur $\overline{B(0, 1)}$, telle que construite dans le cours:
   (a) $\rho \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$,
   (b) $\rho(x) > 0$ pour $|x| < 1$,
   (c) $\operatorname{supp} \rho = \overline{B(0, 1)}$,
   (d) $\int_{\mathbb{R}^d} \rho(x) dx = 1$.

   Soit $\rho_n = n^d \rho(nx)$. Soit $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$. En utilisant les résultats du cours, montrer que $\rho_n * \chi$ converge vers χ dans $C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$.

Exercice 7 Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$.

1. Soit $f : \Omega \to \mathbb{C}$. Rappeler la définition du support et du support essentiel de f.

2. Soit $A \subset \Omega$. Quel est le support de la fonction indicatrice $\mathbb{1}_A$ de A? Supposons A mesurable, de mesure nulle. Quel est le support essentiel de $\mathbb{1}_A$? de $\mathbb{1}_{\Omega\setminus A}$?

3. Soit φ une fonction continue sur Ω. Montrer que le support et le support essentiel de A sont identiques.

4. Soient $f : \Omega \to \mathbb{C}$ et $g : \Omega \to \mathbb{C}$ dont les supports sont disjoints. Montrer que $fg = 0$. Cela reste-t-il vrai si on suppose uniquement que leurs supports essentiels sont disjoints?

Exercice 8 Le but de cet exercice est de montrer la proposition suivante : (Proposition 3.3.16 du cours):

Proposition 1 *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$. Soit K un compact de Ω et $\mathcal{O}$ un ouvert tel que $K \subset \mathcal{O}$ et $\overline{\mathcal{O}} \subset \Omega$. Il existe alors $\chi \in C_0^\infty(\Omega)$ telle que $\chi \equiv 1$ sur K, $\chi \equiv 0$ sur $\mathcal{O}^c$ et $0 \leq \chi \leq 1$.*

1. Soit $y \in K$. Justifier qu'il existe $\varepsilon_y > 0$ tel que $B(y, 2\varepsilon_y) \subset \Omega$.

2. En utilisant le résultat de l'existence d'une fonction pic vu dans le cours, montrer qu'il existe une fonction $\chi_y \in \mathcal{D}(\Omega)$ telle que
   - $\forall x \in \Omega,\ \chi_y(x) \geq 0$.
   - $\operatorname{supp} \chi_y = \overline{B}(y, \varepsilon_y) \Subset \Omega$.
   - $\forall x \in \overline{B}(y, \varepsilon_y/2),\ \chi_y(x) \geq 1$.

3. Justifier qu'il existe un sous-ensemble fini K' de K tel que
$$K \subset \bigcup_{y \in K'} B(y, \varepsilon_y/2).$$

4. Soit
$$g(x) = \sum_{y \in K'} \chi_y(x), \quad f(x) = \rho(g(x)),$$
où ρ est une fonction marche (ou fonction "plateau") construite dans le cours : elle est C^∞, croissante et vaut 0 pour sur $]-\infty, 0]$ et 1 sur $[1, \infty[$. Montrer que f vérifie les conclusions de la proposition.