

## Feuille de TD 2 : Distributions - Exemples, ordre et support.

### Exercice 1

Soit  $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ . Montrer que les expressions suivantes définissent des distributions dont on déterminera l'ordre et le support :

$$\int_{\mathbb{R}} \varphi(x^2) dx, \quad \int_{\mathbb{R}} \varphi'(x)e^{x^2} dx.$$

### Exercice 2

1. Soit  $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ . Montrer que l'expression suivante définit une distribution  $T$  d'ordre au plus 1 :

$$\int_0^{+\infty} \varphi'(x) \log(x) dx.$$

2. Soit  $\varphi_n$  une fonction plateau valant 1 sur  $[\frac{1}{n}, 1]$  et dont le support est inclus dans  $[\frac{1}{2n}, 2]$ .

- Minorer  $|\langle T, \varphi_n \rangle|$ .
- En déduire que  $T$  est une distribution d'ordre exactement 1.
- Déterminer le support de  $T$ .

### Exercice 3 - Valeur principale de $\frac{1}{x}$

Soit  $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ .

- Montrer qu'il existe  $\psi \in C^\infty(\mathbb{R})$  telle que, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $\varphi(x) = \varphi(0) + x\psi(x)$ .
- Montrer que la limite

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{|x| > \varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x} dx$$

existe.

- Montrer que cette expression définit une distribution d'ordre au plus 1, appelée *valeur principale de  $\frac{1}{x}$*  et notée  $\text{vp}(\frac{1}{x})$ .
- En considérant  $\varphi_n$  comme à l'exercice 2, montrer que  $\text{vp}(\frac{1}{x})$  est d'ordre exactement 1.

### Exercice 4

Soit  $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ .

- Montrer qu'il existe  $\psi \in C^\infty(\mathbb{R})$  telle que, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $\varphi(x) = \varphi(0) + x\psi(x)$ .
- Montrer que les limites

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \text{Re} \left( \int_{\mathbb{R}} \frac{\varphi(x)}{x - i\varepsilon} dx \right) \text{ et } \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \text{Im} \left( \int_{\mathbb{R}} \frac{\varphi(x)}{x - i\varepsilon} dx \right)$$

existent.

3. En déduire que l'expression

$$\langle T, \varphi \rangle = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\mathbb{R}} \frac{\varphi(x)}{x - i\varepsilon} dx$$

définit une distribution  $T$  dont on identifiera la partie réelle et la partie imaginaire. Donner l'ordre de  $T$ .

### Exercice 5

Soit  $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$ .

1. Montrer que l'expression suivante définit une distribution  $T$  d'ordre au plus 1 :

$$\langle T, \varphi \rangle = \int_0^\infty (\varphi(1/t^2, \sin t) - \varphi(0, \sin t)) dt.$$

2. Calculer le support de  $T$ .

### Exercice 6

Soit  $I \subset \mathbb{R}$  un intervalle ouvert et soit  $x_0 \in I$ . Montrer qu'il n'existe pas de fonction  $f \in L_{\text{loc}}^1(I)$  telle que  $T_f = \delta_{x_0}$ .

### Exercice 7 - Distribution d'ordre infini

Soit  $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ . Montrer que l'expression

$$\langle T, \varphi \rangle = \sum_{p=0}^{\infty} \varphi^{(p)}(p)$$

définit une distribution sur  $\mathbb{R}$ , d'ordre infini.

### Exercice 8 - Partie finie de $x^\alpha$

Soient  $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$  et  $\varepsilon > 0$ .

1. Pour  $\alpha \in ]-2, -1[$ , montrer que :

$$\int_{\varepsilon}^{\infty} x^\alpha \varphi(x) dx = A_\varphi \varepsilon^{\alpha+1} + R_\varepsilon$$

où  $A_\varphi \in \mathbb{R}$  ne dépend pas de  $\varepsilon$  et où  $R_\varepsilon$  tend vers une limite lorsque  $\varepsilon$  tend vers  $0^+$ .

2. On pose :  $\langle \text{pf}(x^\alpha), \varphi \rangle = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} R_\varepsilon$ . Montrer que  $\text{pf}(x^\alpha)$  est une distribution d'ordre au plus 1.

### Exercice 9

Soit  $u$  une fonction continue sur  $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  telle que

$$\forall t > 0, \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, u(tx) = t^{-n} u(x).$$

1. Soient  $\varepsilon > 0$  et  $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ . On pose

$$I_\varepsilon(\varphi) = \int_{|x| \geq \varepsilon} u(x)\varphi(x)dx.$$

Montrer que  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} I_\varepsilon(\varphi)$  existe pour toute  $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$  si et seulement si

$$\int_{|\omega|=1} u(\omega)d\omega = 0. \quad (1)$$

*Indication :* Passer en coordonnées polaires  $(r, \omega) \in ]0, +\infty[ \times S^{n-1}$  pour  $|x| \geq \varepsilon$ . Puis utiliser la formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre 1.

2. On suppose que la condition (1) est satisfaite. On pose alors, pour toute  $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ ,

$$\langle T, \varphi \rangle = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} I_\varepsilon(\varphi).$$

Montrer que  $T$  définit un élément de  $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$  d'ordre au plus 1.

### Exercice 10 - Partie finie de $\|x\|^{-a}$

Soient  $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$  et  $\varepsilon > 0$ .

1. Pour  $a > 0$ , montrer qu'il existe un polynôme en  $\varepsilon$ ,  $I(\varepsilon)$ , tel que la limite :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left( \int_{\|x\| \geq \varepsilon} \|x\|^{-a} \varphi(x) dx + I(\varepsilon) \right)$$

existe et soit finie.

*Indication :* on utilisera les coordonnées polaires ainsi que la formule de Taylor à un ordre adéquat.

2. On pose :  $\langle \text{pf}(\|x\|^{-a}), \varphi \rangle$  la limite précédente. Montrer que  $\text{pf}(\|x\|^{-a})$  est une distribution d'ordre au plus  $[a - d] + 1$ .