École Sup Galilée **2022-2023**
Filière MACS2
Théorie des distributions

Feuille de TD 3 : Distributions - Opérations.

I. Convergence dans $\mathcal{D}'$

Exercice 1

Calculer les limites, dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$, des suites de distributions suivantes :

$$A_n = \sin(nx), \quad B_n = ng(nx) \text{ où } g \in L^1(\mathbb{R}),$$

$$C_n = \frac{1}{n}\sum_{p=0}^{n-1} \delta_{\frac{p}{n}}, \quad D_n = e^{\mathrm{i}nx}\mathrm{vp}\left(\frac{1}{x}\right).$$

Exercice 2

On note T_n, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la distribution associée à la fonction localement intégrable $t \mapsto \frac{\sin(nt)}{\pi t}$. Montrer que la suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ vers la distribution δ_0. *Indication : on pourra se servir de l'identité* $\int_0^\infty \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}$

Exercice 3

Montrer que la suite de distributions $(T_n)_{n\geq 1}$ définie par:

$$\forall n \geq 1,\ T_n = n(\delta_{\frac{1}{n}} - \delta_{-\frac{1}{n}}),$$

converge dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$. L'ordre de la limite d'une suite de distributions d'ordre m est-il toujours m ?

Exercice 4

Soit $N \in \mathbb{N}$. On pose :

$$F_N \ : \ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{C} \\ t & \mapsto & \frac{1}{2\pi}\sum_{k=-N}^{N} e^{\mathrm{i}kt} \end{array} \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}).$$

On note T_N la distribution associée à F_N.

1. Montrer que, pour tout $t \in \mathbb{R}\setminus 2\pi\mathbb{Z}$,

$$F_N(t) = \frac{1}{2\pi}\frac{\sin(\frac{(2N+1)t}{2})}{\sin\frac{t}{2}}.$$

2. Soit $M \in \mathbb{N}$. Soit $\varphi \in \mathcal{D}$ dont le support est inclus dans $[-(2M+1)\pi, (2M+1)\pi]$. Montrer que :

$$< T_N, \varphi >= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin(\frac{(2N+1)t}{2})}{\sin\frac{t}{2}}\phi(t)\ \mathrm{d}t,$$

où, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\phi(t) = \sum_{k=-M}^{M} \varphi(t+2k\pi)$.

3. En écrivant $\phi(t) = \phi(0) + t\psi(t)$ où ψ est de classe C^∞, montrer que la suite $(T_N)_{N\in\mathbb{N}}$ converge dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ vers la distribution $\sum_{n\in\mathbb{Z}} \delta_{2\pi n}$.

Exercice 5

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}$. Une série de distributions $\sum T_n$ est dite convergente dans $\mathcal{D}'(\Omega)$ lorsque la suite des sommes partielles l'est.

Soit $(a_n)_{n\geq 1}$ une suite de nombres réels.

1. Montrer que la série $\sum_{n\geq 1} a_n \delta_{\frac{1}{n}}$ converge dans $\mathcal{D}'(]0,+\infty[)$.

2. Montrer que si la série $\sum_{n\geq 1} a_n \delta_{\frac{1}{n}}$ converge dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ alors la série numérique $\sum_{n\geq 1} a_n$ converge.

3. On suppose désormais que $\sum_{n\geq 1} a_n$ converge. On pose pour tout $N \geq 1$, $A_N = \sum_{n=1}^{N} a_n$ et $A_0 = 0$, de telle manière que $a_n = A_n - A_{n-1}$ pour tout $n \geq 1$.

a. Montrer que si $\varphi \in \mathcal{D}$ alors la série numérique

$$\sum_{n\geq 1} A_n \left(\varphi\left(\frac{1}{n}\right) - \varphi\left(\frac{1}{n+1}\right)\right)$$

converge. **b.** En déduire que $\sum_{n\geq 1} a_n \delta_{\frac{1}{n}}$ converge dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

II. Multiplication par une fonction C^∞

Exercice 6

Soit T une distribution sur $\mathbb{R}^n$ et f une fonction de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^n$, à valeurs dans $\mathbb{R}$.

1. Montrer que si $fT = 0$, alors le support de T est inclus dans l'ensemble $Z(f) = \{x \in \mathbb{R}^n,\ f(x) = 0\}$.

2. On suppose de plus que T est d'ordre 0. Montrer qu'alors la réciproque est vraie : si le support de T est inclus dans l'ensemble $Z(f) = \{x \in \mathbb{R}^n,\ f(x) = 0\}$ alors $fT = 0$.

3. En prenant $T = \delta'$, montrer que la réciproque est fausse en général si T n'est pas d'ordre 0.

4. Caractériser les fonctions f de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ telles que $f\delta' = 0$.

Exercice 7

Soit $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Montrer que $(\sin x)T = 0$ si et seulement s'il existe une suite $(c_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ de nombres complexes telle que,

$$T = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n \delta_{n\pi}.$$

On pourra s'aider des rÃ©sultats obtenus en cours sur la distribution vp $\left(\frac{1}{x}\right)$.

III. Dérivation dans $\mathcal{D}'$

Exercice 8

Montrer que, dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$,

$$\mathrm{vp}\left(\frac{1}{x}\right)' = \mathrm{Pf}\left(\frac{1}{x^2}\right).$$

où, pour toute $\varphi \in \mathcal{D}$,

$$\langle \mathrm{Pf}\left(\frac{1}{x^2}\right), \varphi\rangle = \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\int_{|x|>\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x^2}\,\mathrm{d}x - \frac{2\varphi(0)}{\varepsilon}\right).$$

Exercice 9

1. Soit $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Calculer $(xT)'$.
2. Résoudre, dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$, l'équation différentielle :

$$xT' + T = 0.$$

Exercice 10

Soit $I =]a, b[$ et f et g deux fonctions de classe C^∞ sur I. On se propose de montrer que si $T \in \mathcal{D}'(I)$ vérifie $T' + fT = g$ au sens des distributions, alors T est donnée par une fonction C^∞ sur I qui vérifie cette équation différentielle au sens usuel.
1. Trouver une solution u_0 de $u' + fu = g$ qui soit de classe C^∞ sur I.
2. Conclure en mettant toute solution de $T' + fT = g$ sous la forme $T = u_0 + S\mathrm{e}^{-F}$ où F est une primitive de f et S une distribution à déterminer.

Exercice 11

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} -2 & \text{si} \quad x \leq -2 \\ 5 & \text{si} \quad x \in]-2, 0] \\ 1 & \text{si} \quad x > 0. \end{cases}$$

1. Justifier que la fonction f est localement intégrable sur $\mathbb{R}$. On note T_f la distribution associée à f.
2. Calculer la dérivée de T_f dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

Exercice 12

Soit $g \in C^0(I)$, telle que sa dérivée au sens des distributions g' vérifie $g' \in L^1_{\mathrm{loc}}(I)$. Soient $a, b \in I$. Montrer que

$$(T_{g1_{[a,b]}})' = T_{g'1_{[a,b]}} + g(a)\delta_a - g(b)\delta_b.$$

Exercice 13

On considère l'opérateur différentiel $P = \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + a\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} + b$, $a, b \in \mathbb{R}$, agissant sur $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.
Soient f et g deux fonctions de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ telles que $Pf = Pg = 0$, $f(0) = g(0)$ et $f'(0) - g'(0) = 1$. On considère la fonction h définie par

$$\forall x \in \mathbb{R},\ h(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si} \quad x \leq 0 \\ g(x) & \text{si} \quad x > 0. \end{cases}$$

Soit enfin T la distribution définie par,

$$\forall \varphi \in \mathcal{D},\ < T, \varphi >= -\int_{\mathbb{R}} h(x)\varphi(x)\mathrm{d}x.$$

Montrer que $PT = \delta_0$, au sens des distributions.

Exercice 14

1. Résoudre, dans l'ensemble des fonctions localement intégrables sur $\mathbb{R}$, l'équation différentielle : $2xu' - u = 0$.
2. Soit $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ une solution de l'équation $2xT' - T = 0$. Soit T_1 sa restriction à $\mathcal{D}'(\mathbb{R}_+^*)$ et soit T_2 sa restriction à $\mathcal{D}'(\mathbb{R}_-^*)$.
a. Calculer T_1 et T_2.
b. Soit $S = T - T_1 - T_2$. Vérifier que le support de S est inclus dans $\{0\}$.
c. Soit $R = \sum_{k=0}^p a_k \delta^{(k)} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ où les a_k sont dans $\mathbb{C}$. Montrer que : $2xR' - R = 0 \iff R = 0$.
d. En déduire les solutions dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ de l'équation $2xT' - T = 0$.
3. Résoudre, dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$, l'équation différentielle :

$$2xT' - T = \delta_0.$$

Exercice 15

Soit h un C^1-difféomorphisme de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Soit T l'application linéaire de $C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$ dans $\mathbb{C}$ définie par :

$$\forall \varphi \in \mathcal{D},\ < T, \varphi >= \int_{\mathbb{R}} \varphi(x, h(x))\,\mathrm{d}x.$$

1. Montrer que $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$. Quel est son ordre ?
2. Déterminer le support de T.
3. En déduire qu'il n'existe pas de fonction continue sur $\mathbb{R}^2$ telle que T soit la distribution associée à cette fonction.
4. Calculer, au sens des distributions, $(\partial_x + h'(x)\partial_y)T$.

Exercice 16 - Équation de Cauchy-Riemann

On considère sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ la fonction donnée par :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\},\ f(x, y) = (x + \mathrm{i}y)^{-1}.$$

1. Montrer que $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^2)$.
2. Soit $\bar\partial$ l'opérateur de Cauchy-Riemann défini par : $\bar\partial = \frac{1}{2}(\partial_x + \mathrm{i}\partial_y)$. Calculer $\bar\partial f$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$.
Indication : on pensera à effectuer un changement de variables en coordonnées polaires.

Exercice 17

Calculer les dÃ©rivÃ©es partielles de la distribution

$$\mathbf{1_{x+y>0}} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^2).$$