École Sup Galilée **2022-2023**
Filière MACS2
Théorie des distributions

Feuille de TD 5 : Espaces de Sobolev.

Exercice 1
Étudier l'appartenance des distributions suivantes à l'espace de Sobolev $H^s(\mathbb{R}^n)$ en fonction de $s \in \mathbb{R}$ et de $n \geq 1$: δ_0, δ_0', $\delta_0^{(k)}$ $(k \in \mathbb{N}^n)$.
Puis, pour $n = 1$, H la fonction de Heaviside.

Exercice 2
Soit $\lambda > 0$. Montrer que l'opérateur différentiel $P = -\Delta + \lambda$ est un isomorphisme de $H^{s+2}(\mathbb{R}^n)$ dans $H^s(\mathbb{R}^n)$ pour tout $s \in \mathbb{R}$.

Exercice 3
1. Soit $s \in \mathbb{R}$. Démontrer l'inégalité

$$\forall \xi, \eta \in \mathbb{R}^n,\ \left(1 + |\xi|^2\right)^s \leq 2^{|s|}(1 + |\xi - \eta|)^{|s|}\ (1 + |\eta|)^s$$

2. Soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Montrer que pour tout $s \geq 0$, l'application $u \mapsto \varphi u$ est continue de $H^s(\mathbb{R}^n)$ dans lui-même.