École Sup Galilée **2022-2023**
Filière MACS2
Théorie des distributions

Corrigé de la feuille de TD 1 : Rappels de calcul intégral

Exercice 1 Existe-t-il une fonction g intégrable sur $\mathbb{R}$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et presque tout $x \in \mathbb{R}$, $n\mathrm{e}^{-n|x|} \leqslant g(x)$?

Solution de l'Exercice 1 Supposons par l'absurde qu'il existe une fonction $g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et presque tout $x \in \mathbb{R}$, $ne^{-n|x|} \leqslant g(x)$.

On note

1. que les fonctions $f_n : x \mapsto ne^{-n|x|}$ sont mesurables, car continues, et
2. que chaque f_n est dominée presque partout (p.p.) par la fonction intégrable $g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$.

On peut donc appliquer le *théorème de convergence dominée* (TCD) pour passer à la limite sous le signe intégral :

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} ne^{-n|x|}\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} \lim_{n\to\infty} ne^{-n|x|}\,\mathrm{d}x.$$

On remarque que pour tout $x \in \mathbb{R}^*$ fixé,

$$\lim_{n\to\infty} ne^{-n|x|} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{e^{n|x|}} = 0$$

par le *théorème des croissances comparées*. Intuitivement, l'exponentielle (en n) "écrase" toutes les fonctions polynomiales (en n). On a obtenu :

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} ne^{-n|x|}\,\mathrm{d}x = 0.$$

Or, par la parité de f_n et par le *théorème fondamental de l'analyse* :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \int_{\mathbb{R}} ne^{-n|x|}\,\mathrm{d}x = 2\int_0^{\infty} ne^{-nx}\,\mathrm{d}x = 2\int_0^{\infty} (-e^{-nx})'\,\mathrm{d}x = 2,$$

donc

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} ne^{-n|x|}\,\mathrm{d}x = 2.$$

Contradiction.

Exercice 2

1. Montrer que, pour tout $u \in [0,1[$, $u + \log(1-u) \leqslant 0$.
2. Soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$. Montrer que, pour $\lambda \in \mathbb{R}$ suffisamment grand, on peut écrire
$$\int_{\mathbb{R}} \exp\left[\lambda^3 \log\left(1 - \frac{y^2}{\lambda^3}\right)\right] \varphi\left(\frac{y}{\lambda}\right) \mathrm{d}y$$
et calculer la limite de ces intégrales lorsque $\lambda \to \infty$.

Solution de l'Exercice 2

1. On étudie les variations de $f : [0,1[\to \mathbb{R}$, $f : u \mapsto u + \log(1-u) \in \mathbb{R}$. Comme $f \in \mathcal{C}^\infty([0,1[)$, on obtient :
$$\forall u \in [0,1[, \quad f'(u) = 1 - \frac{1}{1-u} \leqslant 0.$$
Donc f est décroissante. En plus, par un calcul direct, on voit que $f(0) = 0$. Par conséquent, pour tout $u \in [0,1[$, $f(u) \leqslant 0$.
2. Soit $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})$. Comme φ est à support compact, il existe $R > 0$ tel que $\operatorname{supp} \varphi \subset B(0,R)$.
Dans l'intégrale qu'on étudie, l'argument de φ est $\frac{y}{\lambda}$; comme le support de φ est inclus dans $B(0,R)$, il suffit d'étudier l'intégrale sur $y \in B(0, \lambda R)$. Finalement, pour que l'intégrale soit bien définie, il faut que l'argument du logarithme vérifie $1 - \frac{y^2}{\lambda^3} > 0$. Les deux conditions reviennent à $|y| \leqslant \lambda R < \lambda^{\frac{3}{2}}$. Il suffit donc de prendre $\lambda > R^2$ pour que l'intégrale est bien définie lorsque $\operatorname{supp} \varphi \subset B(0,R)$.
On note que :
$$\int_{\mathbb{R}} \exp\left[\lambda^3 \log\left(1 - \frac{y^2}{\lambda^3}\right)\right] \varphi\left(\frac{y}{\lambda}\right) \mathrm{d}y = \int_{B(0,\lambda R)} \exp\left[\lambda^3 \log\left(1 - \frac{y^2}{\lambda^3}\right)\right] \varphi\left(\frac{y}{\lambda}\right) \mathrm{d}y,$$
On applique le point 1. avec $u = \frac{y^2}{\lambda^3}$ et on obtient $\lambda^3 \log(1 - \frac{y^2}{\lambda^3}) \leqslant -y^2$. Alors :
$$\exp\left[\lambda^3 \log\left(1 - \frac{y^2}{\lambda^3}\right)\right] \varphi\left(\frac{y}{\lambda}\right) \leqslant \exp(-y^2) \sup_{\mathbb{R}} |\varphi| < \infty,$$
car φ est continue à support compact, donc uniformément bornée. Par le TCD,
$$\lim_{\lambda\to\infty} \int_{\mathbb{R}} \exp\left[\lambda^3 \log\left(1 - \frac{y^2}{\lambda^3}\right)\right] \varphi\left(\frac{y}{\lambda}\right) \mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}} \lim_{\lambda\to\infty} \exp\left[\lambda^3 \log\left(1 - \frac{y^2}{\lambda^3}\right)\right] \varphi\left(\frac{y}{\lambda}\right) \mathrm{d}y$$
On note $t = \frac{1}{\lambda^3}$ et, par le *théorème des croissances comparées*,
$$\lim_{\lambda\to\infty} \lambda^3 \log\left(1 - \frac{y^2}{\lambda^3}\right) = \lim_{t\to 0_+} \frac{\log(1-y^2 t)}{t} = \lim_{t \to 0_+} \frac{-y^2 t}{t} = -y^2.$$
On conclut que
$$\lim_{\lambda\to\infty} \int_{\mathbb{R}} \exp\left[\lambda^3 \log\left(1 - \frac{y^2}{\lambda^3}\right)\right] \varphi\left(\frac{y}{\lambda}\right) \mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}} \varphi(0) e^{-y^2} = \varphi(0)\sqrt{\pi}.$$

Exercice 3 Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Montrer que, dans $\mathbb{R}^d$,

1. $\int_{B(0,1)} \frac{1}{\|x\|^\alpha} \mathrm{d}x$ est convergente si et seulement si $\alpha < d$.
2. $\int_{\mathbb{R}^d \setminus B(0,1)} \frac{1}{\|x\|^\alpha} \mathrm{d}x$ est convergente si et seulement si $\alpha > d$.

Solution de l'Exercice 3 On fait un changement de variables en coordonnées polaires : $x = r\omega$, où $r \in \mathbb{R}_+^*$, $r = ||x||$ et ω parcourt la sphère $\mathbb{S}^{d-1}$. On a $\mathrm{d}x = r^{d-1}\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\omega$ et, par le *théorème de Fubini*,

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{||x||^\alpha}\,\mathrm{d}x = \int_0^\infty \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \frac{1}{r^\alpha} r^{d-1} \mathrm{d}r\mathrm{d}\omega = |\mathbb{S}^{d-1}| \int_0^\infty r^{d-1-\alpha}\,\mathrm{d}r.$$

Cela nous ramène en dimension 1. Pour conclure, on peut appliquer le *critère de Riemann.*

Du coup, par ce changement de variables,

$$\int_{B(0,1)} \frac{1}{||x||^\alpha}\,\mathrm{d}x = |\mathbb{S}^{d-1}| \int_0^1 r^{d-1-\alpha}\,\mathrm{d}r$$

est convergente si et seulement si $\int_0^1 r^{d-1-\alpha}\,\mathrm{d}r$ est convergente, qui à son tour est vrai si et seulement si $d-1-\alpha > -1$, où $\alpha < d$.

De même,

$$\int_{\mathbb{R}^d - B(0,1)} \frac{1}{||x||^\alpha}\,\mathrm{d}x = |\mathbb{S}^{d-1}| \int_1^\infty r^{d-1-\alpha}\,\mathrm{d}r$$

est convergente si et seulement si $d-1-\alpha < -1$, où $\alpha > d$.

Exercice 4 Soit $a > 0$. On pose pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$F(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}tx}\mathrm{e}^{-at^2}\mathrm{d}t.$$

1. Montrer que F est bien définie sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et que pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$F'(x) = -\frac{x}{2a}F(x).$$
3. En déduire que pour tout réel x, $F(x) = F(0)\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{4a}}$ puis que
$$\forall x \in \mathbb{R},\ F(x) = \sqrt{\frac{\pi}{a}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{4a}}.$$
On rappelle que $\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-u^2}\mathrm{d}u = \sqrt{\pi}$.

Solution de l'Exercice 4

Le but de cet exercice est de reviser la théorie des intégrales à paramètre (ici, le paramètre est x). Il s'agit de calculer la transformée de Fourier de la gaussienne e^{-at^2}.

1. La fonction $t \mapsto e^{-itx}e^{-at^2}$ définie sur $\mathbb{R}$ est mesurable (car produit de fonctions continues), positive et dominée par une fonction intégrable $t \mapsto e^{-at^2}$ (une gaussienne). Par conséquent, $t \mapsto e^{-itx}e^{-at^2}$ est intégrable et donc F est bien définie.
2. On note $f(x,t) = e^{-itx}e^{-at^2}$ et on utilise le *théorème de dérivabilité sous le signe de l'intégrale* en remarquant que
   (a) (variable t) pour tout x, f est intégrable en t, c'est-à-dire $t \mapsto e^{-itx}e^{-at^2}$ est intégrable, (voir 1.),
   (b) (variable t) $\left|\frac{\partial f(x,t)}{\partial x}\right|$ est dominée par une fonction intégrable en t pour tout x et presque tout t, car $|ite^{-itx}e^{-at^2}| \leqslant |te^{-at^2}| \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$,
   (c) (paramètre x) pour presque tout t, f est $\mathcal{C}^1$ en x.

   Donc F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, et, pour tout x dans $\mathbb{R}$,
$$\begin{aligned} F'(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial(e^{-itx}e^{-at^2})}{\partial x}\,\mathrm{d}t \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} -ite^{-itx}e^{-at^2}\,\mathrm{d}t \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} ie^{-itx}\left(\frac{e^{-at^2}}{2a}\right)'\,\mathrm{d}t \\ &= \left[ie^{-itx}\frac{e^{-at^2}}{2a}\right]_{-\infty}^{\infty} - \int_{\infty}^{\infty}(-i^2)\frac{x}{2a}e^{-itx}e^{-at^2}\,\mathrm{d}t \\ &= -\frac{x}{2a}F(x). \end{aligned}$$
3. En mutipliant l'identité $F'(x) + \frac{x}{2a}F(x) = 0$ par $e^{\frac{x^2}{4a}}$, on obtient :
$$0 = F'(x)e^{\frac{x^2}{4a}} + \frac{x}{4a}F(x)e^{\frac{x^2}{4a}} = \left(F(x)e^{\frac{x^2}{4a}}\right)',$$
   donc $F(x) = cste \times e^{-\frac{x^2}{4a}}$. Pour trouver la constante, il suffit de calculer $F(0)$ en utilisant la définition de F, donc $F(0) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-at^2}\,\mathrm{d}t$. Après le changement de variables $u = \sqrt{a}t$, on obtient $F(0) = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$, donc $F(x) = \sqrt{\frac{\pi}{a}}e^{-\frac{x^2}{4a}}$.

Exercice 5 Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$. On considère l'application
$$Tf \;:\; \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \int_0^1 f(x-y)\mathrm{d}y \end{array}.$$

1. Montrer que, si f est continue à support compact, Tf est continue.
2. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues à support compact qui converge vers f dans $L^1(\mathbb{R})$. Montrer que $(Tf_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers Tf uniformément sur $\mathbb{R}$. En déduire que Tf est continue sur $\mathbb{R}$.
3. En déduire que le produit de convolution sur $L^1(\mathbb{R})$ n'admet pas d'élément unité.

Solution de l'Exercice 5

1. On montre d'abord que Tf est bien définie quand f est continue à support compact. Soit donc $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$ avec $\operatorname{supp} f \subset [-R, R]$, $R > 0$. Alors $f \in L^1(\mathbb{R})$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$ fixé, la fonction $y \mapsto f(x-y)$ appartient à $L^1([0,1])$. Donc Tf est bien définie.
   On veut applique le *théorème de continuité sous signe de l'intégrale.* On voit que
   (a) (variable y) pour tout x, $y \mapsto f(x-y)$ est bien mesurable en y, en tant que composition de fonctions mesurables,
   (b) (variable y) on a la majoration :
   $$|f(x-y)| \leqslant \sup_{\mathbb{R}} |f| < \infty, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in [0,1],$$
   (c) (paramètre x) pour presque tout t, $x \mapsto f(x-y)$ est continue en x, en tant que compositition de fonctions continues.

   La constante $\sup_{\mathbb{R}} |f|$ est vue comme une fonction (de y) positive et intégrable sur $[0,1]$. Par conséquent, Tf est continue sur $\mathbb{R}$.
2. Comme les f_n sont continues à support compact, les Tf_n sont bien définis. Pour tout $x \in \mathbb{R}$,
   $$|Tf_n(x) - Tf(x)| \leqslant \int_0^1 |f_n(x-y) - f(x-y)|\, \mathrm{d}y \leqslant ||f_n - f||_{L^1([x-1,x])}.$$
   Cela implique que
   $$\sup_{x\in\mathbb{R}} |Tf_n(x) - Tf(x)| \leqslant \sup_{x\in\mathbb{R}} ||f_n - f||_{L^1([x-1,x])} \leqslant ||f_n - f||_{L^1(\mathbb{R})}.$$
   Alors, lorsque $n \to \infty$, $|Tf_n(x) - Tf(x)|$ converge vers 0. Comme $||f_n - f||_{L^1(\mathbb{R})}$ est indépendente de x, (Tf_n) converge uniformement vers Tf sur $\mathbb{R}$.
   Par 1., Tf_n est continue sur $\mathbb{R}$ pour tout n. On vient de voir que Tf_n converge *uniformément* vers Tf, donc on conclut que Tf est également continue.
3. On remarque que $Tf = f * \mathbb{1}_{[0,1]}$. Si, par l'absurde, il existe $u \in L^1(\mathbb{R})$ telle que pour tout $f \in L^1(\mathbb{R})$, $f * u = f$, alors $Tu = \mathbb{1}_{[0,1]}$.
   Or, on rapelle que $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})$ est dense en $L^1(\mathbb{R})$, càd n'importe quel élément de $L^1(\mathbb{R})$ peut être approché (en norme L^1) par une suite de fonctions lisses à support compact. C'est le cas de $\mathbb{1}_{[0,1]}$ aussi. Alors, par 2., Tu est continue sur $\mathbb{R}$.
   Contradiction.

Exercice 6 On note Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$.

1. Soit $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de $C_0^\infty(\Omega)$, et $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$. Rappeler la définition de "$(\varphi_n)_n$ converge vers φ dans $C_0^\infty(\Omega)$".
2. Soit $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$, non nulle, et $a \in \mathbb{R}^d\backslash\{0\}$. Soit
$$\chi_n(x) = e^{-n|x|^2}\chi(x - na).$$
Montrer que $(\chi_n)_n$ converge vers la fonction constante nulle uniformément dans $\mathbb{R}^d$. Est-ce que $(\chi_n)_n$ converge dans $C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$?
3. Soit $B(0,1)$ la boule unité ouverte de $\mathbb{R}^d$ et ρ une fonction pic sur $\overline{B(0,1)}$, telle que construite dans le cours :
   (a) $\rho \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$,
   (b) $\rho(x) > 0$ pour $|x| < 1$,
   (c) $\operatorname{supp}\rho = \overline{B(0,1)}$,
   (d) $\int_{\mathbb{R}^d}\rho(x)dx = 1$.

   Soit $\rho_n = n^d\rho(nx)$. Soit $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$. En utilisant les résultats du cours, montrer que $\rho_n * \chi$ converge vers χ dans $C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$.

Solution de l'Exercice 6

1. **La topologie sur $\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$.** Une suite $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ tend vers φ dans la topologie de $\mathcal{C}_0^\infty$ lorsque :
   (a) il existe un compact fixe $K \subset \Omega$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\operatorname{supp}\varphi_n \subset K$, et
   (b) la suite $d_k(\varphi,\varphi_n)$ tend vers zero lorsque n tend vers l'infini, où $d_k(\varphi,\varphi_n) = \sum_{j=0}^\infty \frac{1}{2^j}\min\left(\max_{x\in K,|\alpha|\leqslant j}\left(\partial^\alpha\varphi_n(x) - \partial^\alpha\varphi(x), 1\right)\right)$.

   On note que la condition (b) est équivalente au fait que pour tout multi-indice α, $(\partial^\alpha\varphi_n)_n$ tend vers $\partial^\alpha\varphi$ uniformément sur K. C'est cette version de la condition (b) qu'on utilise le plus souvent en exercice. Elle est aussi la plus facile à retenir !
2. **La convergence uniforme vs la convergence des fonctions test (sur $\mathcal{C}_0^\infty$).** Soit $R > 0$ tel que $\operatorname{supp}\chi \subset B(0,R)$. On sait qu'il existe $M > 0$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\chi_n(x) < M$ (car χ est lisse et à support compact, donc par *Weierstrass* elle est bornée).

   On note que la fonction χ_n est le produit de deux fonctions à comportement différent : la fonction à support compact χ, composée par une translation de longeur $-na$ (elle se "déplace" par translation vers $+\infty$ lorsque n tend vers l'infini) et une fonction exponentielle $e^{-n|x|^2}$ (qui "s'écrase" sur $\mathbb{R}^*$ lorsque x tend vers l'infini). On divise $\mathbb{R}$ en deux régions distinctes et on étudie le comportement de la suite χ_n sur chaque région.
   — Si $x \in B(0,1)$, $|\chi_n| \leqslant Me^{-n}$.
   — Si $x \in B(0,1)^C$, $|\chi_n| \leqslant |\chi(x - na)|$, qui est nulle quand $n > \frac{R+1}{|a|}$ (car cela implique que $|x - na| > R$ et donc $x \notin \operatorname{supp}\chi$).

Les majorants ci-dessus ne dépend pas de x et tendent vers 0 lorsque n tend vers infini. Donc $(\chi_n)_n$ converge uniformément vers la fonction nulle.

Par contre, dès que χ n'est pas identiquement nulle, χ_n n'est pas convergente dans $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^d)$. Pourquoi ? Car la condition (b) de la définition ne peut jamais être vérifiée. En effet, le support de χ_n est $\operatorname{supp}\chi + na$, donc il n'existe aucun compact K dans $\mathbb{R}^d$ tel que pour tout n, $\operatorname{supp}\chi_n \subset K$.

3. **Régularisation.** On commence par utiliser la propriété de la dérivée sur la convolution. Pour tout $x \in \mathbb{R}^d$ et pour tout multi-indice $\alpha \in \mathbb{N}^d$,

$$\begin{aligned}\partial^\alpha(\rho_n * \chi)(x) - \partial^\alpha\chi(x) &= (\rho_n * \partial^\alpha\chi)(x) - \partial^\alpha\chi(x)\\ &= n^d \int_{\mathbb{R}^d} \rho(n(x-y))\partial^\alpha\chi(y)\,\mathrm{d}y - \partial^\alpha\chi(x).\end{aligned}$$

Par changement de variables $z = n(x-y)$, $\mathrm{d}z = n^d\mathrm{d}y$,

$$\begin{aligned}\partial^\alpha(\rho_n * \chi)(x) - \partial^\alpha\chi(x) &= \int_{\mathbb{R}^d} \rho(z)\partial^\alpha\chi\left(x - \frac{z}{n}\right)\mathrm{d}z - \partial^\alpha\chi(x)\\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \rho(z)\left(\partial^\alpha\chi\left(x-\frac{z}{n}\right) - \partial^\alpha\chi(x)\right)\mathrm{d}z.\end{aligned}$$

Or $\partial^\alpha\chi$ est continue à support compact, donc elle est uniformément continue :

$$\forall\varepsilon, \exists\eta(\alpha,\varepsilon) > 0, \forall x, x' \in \mathbb{R}^d, |x-x'| < \eta(\alpha,\varepsilon) : |\partial^\alpha\chi(x) - \partial^\alpha\chi(x')| \leqslant \varepsilon.$$

Si n est assez grand ($n > \frac{R}{\eta}$, où $\operatorname{supp}\chi \subset B(0,R)$), alors pour tout $x \in \mathbb{R}^d$,

$$|\partial^\alpha(\rho_n * \chi)(x) - \chi(x)| \leqslant \int_{\mathbb{R}^d} \rho(z)|\partial^\alpha\chi(x - \frac{z}{n}) - \partial^\alpha\chi(x)|\,\mathrm{d}z \leqslant \varepsilon,$$

d'où la convergence uniforme pour tout α.

De plus, comme $\operatorname{supp}\rho_n * \chi \subset \overline{\operatorname{supp}\rho_n + \operatorname{supp}\chi}$, on obtient la convergence dans $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^d)$.

Exercice 7 Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$.

1. Soit $f : \Omega \to \mathbb{C}$. Rappeler la définition du support et du support essentiel de f.
2. Soit $A \subset \Omega$. Quel est le support de la fonction indicatrice $\mathbb{1}_A$ de A ? Supposons A mesurable, de mesure nulle. Quel est le support essentiel de $\mathbb{1}_A$? de $\mathbb{1}_{\Omega\setminus A}$?
3. Soit φ une fonction continue sur Ω. Montrer que le support et le support essentiel de A sont identiques.
4. Soient $f : \Omega \to \mathbb{C}$ et $g : \Omega \to \mathbb{C}$ dont les supports sont disjoints. Montrer que $fg = 0$. Cela reste-t-il vrai si on suppose uniquement que leurs supports essentiels sont disjoints ?

Solution de l'Exercice 7

1. On rappelle les définitions
$$\operatorname{supp} f = \overline{\{x \in \Omega : f(x) \neq 0\}}$$
et
$$\operatorname{supp\,ess} f = \mathbb{R}^d - \{x \in \Omega : \exists V_x \text{ un voisinage de } x \text{ tel que } f|_{V_x} = 0 \text{ p.p.}\}.$$

2. Par la définition du support, $\operatorname{supp} \mathbb{1}_A = \bar{A}$.
Le grand interêt du support essentiel est qu'il se comporte bien sur les fonctions mesurables peu régulières. Si deux fonctions mesurables f et g sont égales presque partout, alors $\operatorname{supp\,ess} f = \operatorname{supp\,ess} g$. (Vérifiez cette assertion avec la définition !) Si A est mesurable de mesure nulle, alors $\mathbb{1}_A = \mathbb{1}_\varnothing$ p.p., et donc $\operatorname{supp\,ess} \mathbb{1}_A = \operatorname{supp\,ess} \mathbb{1}_\varnothing = \varnothing$.
De même, $\operatorname{supp\,ess} \mathbb{1}_{\Omega - A} = \operatorname{supp\,ess} \mathbb{1}_\Omega = \bar{\Omega}$.

3. <u>$\operatorname{supp} \varphi \subset \operatorname{supp\,ess} \varphi$</u>. Soit $x \in \operatorname{supp} \varphi$. Par la définition de supp, il existe une suite $(x_n)_n \subset \operatorname{supp} \varphi$ convergente vers x telle que $\varphi(x_n) \neq 0$. Comme φ est continue, il existe $\varepsilon_n > 0$ tel que pour tout $y \in B(x_n, \varepsilon_n)$, $\varphi(y) \neq 0$.
Soit V un voisinage arbitraire de x. Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $B(x_N, \varepsilon_N) \cap V$ ne soit pas de mesure nulle. Donc $x \in \operatorname{supp\,ess} f$.
<u>$\operatorname{supp\,ess} \varphi \subset \operatorname{supp} \varphi$.</u> Soit $x \in \operatorname{supp\,ess} \varphi$. Pour tout voisinage V de x, il existe x_V tel que $\varphi(x_V) \neq 0$. En prennant la suite des voisinages $B(x, \frac{1}{n}) \cap \Omega$, on peut construire une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tel que $f(x_n) \neq 0$. Par définition, $x \in \operatorname{supp} \varphi$.

4. On suppose que $\operatorname{supp} f \cap \operatorname{supp} g = \varnothing$. Alors on peut écrire le domaine comme union disjointe $\mathbb{R}^d = \operatorname{supp} f \sqcup \operatorname{supp} g \sqcup (\operatorname{supp} f \cup \operatorname{supp} g)^C$.
   - Si $x \in \operatorname{supp} f$, alors $g(x) = 0$ car $x \in \operatorname{supp} g^C$.
   - Si $x \in \operatorname{supp} g$, alors $f(x) = 0$ car $x \in \operatorname{supp} f^C$.
   - Si $x \in (\operatorname{supp} f \cup \operatorname{supp} g)^C$, alors $f(x) = g(x) = 0$.

   Donc $fg = 0$ sur $\mathbb{R}^d$.
   Cela n'est pas nécessairement vrai si ce ne sont que les supports essentiels qui sont disjoints. Soit $f = \mathbb{1}_{]-\infty,-1] \cup \{0\}}$ et $g = \mathbb{1}_{\{0\} \cup [1,+\infty[}$. Alors $\operatorname{supp\,ess} f =]-\infty, 1]$, $\operatorname{supp\,ess} g = [1, +\infty[$, mais $fg(0) = 1$.

Exercice 8 Le but de cet exercice est de montrer la proposition suivante : (Proposition 3.3.16 du cours) :

Proposition 1 Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$. Soit K un compact de Ω et $\mathcal{O}$ un ouvert tel que $K \subset \mathcal{O}$ et $\overline{\mathcal{O}} \subset \Omega$. Il existe alors $\chi \in C_0^\infty(\Omega)$ telle que $\chi \equiv 1$ sur K, $\chi \equiv 0$ sur $\mathcal{O}^c$ et $0 \leqslant \chi \leqslant 1$.

1. Soit $y \in K$. Justifier qu'il existe $\varepsilon_y > 0$ tel que $B(y, 2\varepsilon_y) \subset \Omega$.

2. En utilisant le résultat de l'existence d'une fonction pic vu dans le cours, montrer qu'il existe une fonction $\chi_y \in \mathcal{D}(\Omega)$ telle que
   — $\forall x \in \Omega$, $\chi_y(x) \geqslant 0$.
   — $\operatorname{supp} \chi_y = \overline{B}(y, \varepsilon_y) \Subset \Omega$.
   — $\forall x \in \overline{B}(y, \varepsilon_y/2)$, $\chi_y(x) \geqslant 1$.
3. Justifier qu'il existe un sous-ensemble fini K' de K tel que
$$K \subset \bigcup_{y \in K'} B(y, \varepsilon_y/2).$$
4. Soit
$$g(x) = \sum_{y \in K'} \chi_y(x), \quad f(x) = \rho(g(x)),$$
   où ρ est une fonction marche (ou fonction "plateau") construite dans le cours : elle est C^∞, croissante et vaut 0 pour sur $]-\infty, 0]$ et 1 sur $[1, \infty[$. Montrer que f vérifie les conclusions de la proposition.

Solution de l'Exercice 8

1. Comme $\mathcal{O}$ est un ouvert en $\mathbb{R}^d$, alors pour tout $y \in \mathcal{O}$, il existe $\varepsilon_y > 0$ tel que $B(y, 2\varepsilon_y) \subset \mathcal{O} \subset \Omega$. Cela est vrai pour tout point de K, en particulier, car $K \subset \mathcal{O}$.
2. On peut partir de la fonction pic φ_0 définie en cours, qui vaut 1 en 0 et vaut 0 en dehors de la boule unité :
$$\varphi_0(x) = \begin{cases} \exp\left(-\frac{|x|^2}{1-|x|^2}\right), & |x| < 1, \\ 0, & |x| \geqslant 1. \end{cases}$$
   On applique une translation de y,
$$\varphi_y(x) = \begin{cases} \exp\left(-\frac{|x-y|^2}{1-|x-y|^2}\right), & |x-y| < 1, \\ 0, & |x-y| \geqslant 1. \end{cases}$$
   On utilise une dilatation de facteur ε_y autour de y pour que le support de la fonction soit inclus dans $\overline{B}(y, \varepsilon_y)$ (sachant que $B(y, \varepsilon_y) \subset B(y, 2\varepsilon_y) \subset \Omega$) :
$$\varphi_{\varepsilon_y, y}(x) = \begin{cases} \exp\left(-\frac{\left|\frac{x-y}{\varepsilon_y}\right|^2}{1-\left|\frac{x-y}{\varepsilon_y}\right|^2}\right), & \left|\frac{x-y}{\varepsilon_y}\right| < 1, \\ 0, & \left|\frac{x-y}{\varepsilon_y}\right| \geqslant 1. \end{cases}$$
   On remarque que $\varphi_{\varepsilon_y, y}$ attent son maximum en y et décroît de manière monotone lorsque x s'éloigne de y.
   On utilise un changement d'échelle pour s'assurer que le résultat et supérieur à 1 pour tout $x \in \overline{B}(y, \varepsilon_y/2)$ en multipliant la fonction par une constante positive bien

choisie. Comme pour tout x tel que $|x-y| = \varepsilon_y/2$ on obtient $\varphi_{\varepsilon_y,y}(x) = \exp(-\frac{1}{3}) > 1$, alors il suffit de choisir la constante de multiplication $\exp(-\frac{1}{3})^{-1}$. Par un argument de monotonie,

$$\chi_y(x) = \begin{cases} \exp(-\frac{1}{3})^{-1} \exp\left(-\frac{\left|\frac{x-y}{\varepsilon_y}\right|^2}{1-\left|\frac{x-y}{\varepsilon_y}\right|^2}\right), & \left|\frac{x-y}{\varepsilon_y}\right| < 1, \\ 0, & \left|\frac{x-y}{\varepsilon_y}\right| \geqslant 1. \end{cases}$$

3. On sait que $K \subset \cup_{y\in K} B(y, \frac{\varepsilon_y}{2})$, qui est un recouvrement ouvert. Comme K est compact, on peut extraire un sous-recouvrement fini, qu'on note $\cup_{y\in K'} B(y, \varepsilon_{\frac{y}{2}})$. On a utilisé la propriété de Borel-Lebesgue.
4. Par les points précédents, g est positive, lisse et supérieure à 1 dans tout point K. Donc $(\rho \circ g)_K = 1$. De même, on sait que g est nulle en dehors de $\mathcal{O}$, donc $(\rho \circ g)_{\mathcal{O}^C} = 0$.

   Pour tout K et $\mathcal{O}$ définis dans la proposition antérieure, on vient de construire une fonction "plateau" $\rho \circ g$ qui est égale à 1 sur K et 0 en dehors de $\mathcal{O}$.