École Sup Galilée **2022-2023**
Filière MACS2
Théorie des distributions

Corrigé de la feuille de TD 2 : Distributions - Exemples, ordre et support.

Exercice 1 Soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$. Montrer que les expressions suivantes définissent des distributions dont on déterminera l'ordre et le support. :

$$\int_{\mathbb{R}} \varphi(x^2)\,\mathrm{d}x, \quad \int_{\mathbb{R}} \varphi'(x)e^{x^2}\,\mathrm{d}x.$$

Solution de l'Exercice 1 Il s'agit d'abord, pour chacune des deux applications (toutes deux notées T), de démontrer la propriété suivante : quel que soit le compact K de $\mathbb{R}$, il existe $m \in \mathbb{N}$ (dépendant de K) et une constante $C = C(K, m)$ (dépendant de K et donc de m) tels que, quelle que soit $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})$ à support dans K, on a :

$$|\langle T, \varphi\rangle| \leqslant C \cdot p_{m,K}(\varphi),$$

où

$$p_{m,K}(\varphi) = \max_{x\in K, |\alpha|\leqslant m}(|\partial^\alpha \varphi(x)|).$$

Comme il s'agit, de plus, de déterminer l'ordre de ces distributions, nous allons en fait chercher un m indépendant de K, et tâcher de trouver le plus petit possible.

1. L'application $T : \varphi \mapsto \int_{\mathbb{R}} \varphi(x^2)\,\mathrm{d}x$ est une forme linéaire sur $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})$. Effectivement, pour toutes φ_1, φ_2 fonctions test (donc dans $\mathcal{C}_0^\infty$) et tout $\alpha \in \mathbb{R}$, on vérifie facilement que $T(\varphi_1 + \alpha\varphi_2) = T(\varphi_1) + \alpha T(\varphi_2)$.
   Soit K un compact arbitraire. Il existe $R > 0$ tel que $K \subset [-R, R]$. Soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ à support compact dans K. Alors
   $$\begin{aligned}|\langle T, \varphi\rangle| &= \left|\int_{x^2\in[0,R]} \varphi(x^2)\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \int_{x\in[-\sqrt{R},\sqrt{R}]} |\varphi(x^2)|\,\mathrm{d}x \leqslant \|\varphi\|_{L^\infty} \int_{x\in[-\sqrt{R},\sqrt{R}]} \mathrm{d}x \\ &\leqslant 2\sqrt{R}\|\varphi\|_{L^\infty}.\end{aligned}$$
   Dans ce cas, $C_K = 2\sqrt{R}$ et $m = 0$. Donc T est une distribution d'ordre 0.
   Il est clair que, quelle que soit $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})$ à support dans $\mathbb{R}_-$ on a que $|\langle T, \varphi\rangle| = 0$. Le support de T est donc inclus dans $\mathbb{R}_+$. Pour montrer qu'il est égal à $\mathbb{R}_+$, soit $t > 0$ et soit φ une fonction pic sur $]t - \varepsilon, t + \varepsilon[$. Alors
   $$\langle T, \varphi\rangle \geqslant \int_{x^2\in]t-\varepsilon,t+\varepsilon[} \varphi(x^2)\,\mathrm{d}t > 0$$
   et donc $t \in \mathrm{supp}(T)$. Comme $\mathrm{supp}\, T$ est un fermé et on a démontré que $\mathbb{R}_+^* \subset \mathrm{supp}\, T$, alors par adhèrence $\mathbb{R}_+ \subset \mathrm{supp}(T)$.
   On conclut que $\mathrm{supp}(T) = \mathbb{R}_+$.

2. L'application, $T : \varphi \mapsto \int_{\mathbb{R}} \varphi'(x)e^{x^2}\,\mathrm{d}x$ est une forme linéaire sur $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})$ (car la dérivation et l'intégration sont des opérations linéaires).
   Soit K un compact arbitraire. Il existe $R > 0$ tel que $K \subset [-R, R]$. Soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ à support compact dans K.

$$\begin{aligned}
|\langle T, \varphi\rangle| &= \left|\int_{\mathbb{R}} \varphi'(x)e^{x^2}\mathrm{d}x\right| \\
&= \left|\int_{-R}^{R} \varphi'(x)e^{x^2}\mathrm{d}x\right| \\
&\leqslant 2ae^{R^2}\|\varphi'\|_\infty.
\end{aligned}$$

   En prenant $m = 1$ et $C = 2ae^{R^2}$ (qui ne dépend bien que de K), on obtient bien la propriété cherchée, et T est une distribution. Puisque, de plus, la valeur $m = 1$ est indépendante de K, cette distribution est d'ordre au plus 1.
   De plus, avec une *intégration par parties* à l'avant-dernière ligne du calcul précédent, il vient :

$$\begin{aligned}
|\langle T, \varphi\rangle| &= \left|\int_{-R}^{R} \varphi'(x)e^{x^2}\mathrm{d}x\right| \\
&= \left|\int_{-R}^{R} \varphi(x)\cdot 2xe^{x^2}\mathrm{d}x\right| \\
&\leqslant 4a^2e^{R^2}\|\varphi\|_\infty,
\end{aligned}$$

   et donc T est en réalité d'ordre 0 (contrairement à ce qu'aurait pu suggérer sa forme initiale).

   Montrons que le support est $\mathbb{R}$ tout entier. Soit $t \in \mathbb{R}^*$, que l'on prend par exemple positif, et soit φ une fonction pic sur $]t-\varepsilon, t+\varepsilon[$, en choisissant $\varepsilon < t$ (le calcul expliquera cette restriction). L'égalité $|\langle T, \varphi\rangle| = \left|\int_{t-\varepsilon}^{t+\varepsilon} \varphi(x)\cdot 2xe^{x^2}\,\underset{\cdot}{\mathrm{x}}\right|$ permet de minorer $|\langle T, \varphi\rangle|$ par $2(t-\varepsilon)e^{(t-\varepsilon)^2}\left|\int_{t-\varepsilon}^{t+\varepsilon} \varphi(x)\mathrm{d}x\right|$, c'est-à-dire par $2(t-\varepsilon)e^{(t-\varepsilon)^2}$, qui est strictement positif. Tout réel t non nul est donc dans le support, ce dernier est donc égal à $\overline{\mathbb{R}^*} = \mathbb{R}$.

Exercice 2

1. Soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$. Montrer que l'expression suivante définit une distribution T d'ordre au plus 1 :

$$\int_0^{+\infty} \varphi'(x)\log(x)\,\mathrm{d}x.$$

2. Soit φ_n une fonction plateau valant 1 sur $[\frac{1}{n}, 1]$ et dont le support est inclus dans $[\frac{1}{2n}, 2]$.

(a) Minorer $|\langle T, \varphi_n \rangle|$.

(b) En déduire que T est une distribution d'ordre exactement 1.

3. Déterminer le support de T.

Solution de l'Exercice 2

1. L'application $T : \varphi \mapsto \int_0^1 \varphi'(x)\log(x)\,\mathrm{d}x$ est une forme linéaire sur $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})$. Soit φ une fonction arbitraire en $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})$.
   Soit K un compact dans $\mathbb{R}$. Il existe $R > 0$ tel que $K \subset [-R, R]$. Soit $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty$ telle que son support est inclus dans K. Alors
   $$|\langle T, \varphi \rangle| = \left|\int_0^R \varphi'(x)\log(x)\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \|\varphi'\|_{L^\infty} \int_0^R |\log(x)|\,\mathrm{d}x.$$
   On note que $x \mapsto |\log(x)|$ est intégrable en 0. Pour voir cela, on rappelle que pour tout $x \in]0, \infty]$, $\log(x) = (x\log(x) - x)'$. Donc T est une distribution d'ordre *au plus* 1.

2. (a) En appliquant l'*intégration par parties*, on voit que
   $$\begin{aligned}|\langle T, \varphi \rangle| &= \left|\int_{\frac{1}{2n}}^2 \varphi_n'(x)\log(x)\,\mathrm{d}x\right| = \left|[\varphi_n(x)\log(x)]_{\frac{1}{2n}}^2 - \int_{\frac{1}{2n}}^2 \frac{\varphi_n(x)}{x}\,\mathrm{d}x\right| \\ &\geqslant \int_{\frac{1}{n}}^1 \left|\frac{\varphi_n(x)}{x}\right|\mathrm{d}x = \int_{\frac{1}{n}}^1 \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \log(n).\end{aligned}$$

   (b) On suppose que T est une distribution d'ordre 0. Alors pour tout compact K inclus en $\mathbb{R}$, il existe une constante C_K (qui dépend de K) telle que pour toute $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})$ avec $\operatorname{supp}\varphi \in K$, $|\langle T, \varphi \rangle| \leqslant C_K \|\varphi_n\|_{L^\infty}$.
   Par contre on peut trouver facilement un contre-exemple. Sur le compact $[0, 2]$, pour tout constante $C > 0$, il existe toujours une fonction plateau φ_n telle que
   $$|\langle T, \varphi_n \rangle| \geqslant \log(n) \geqslant \|\varphi_n\|_{L^\infty} = C.$$
   Contradiction lorsque n est suffisament grand.

3. On peut facilement voir que le support de la distribution est $\mathbb{R}_+$.

Exercice 3 (Valeur principale de $\frac{1}{x}$)

Soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$.

1. Montrer qu'il existe $\psi \in C^\infty(\mathbb{R})$ telle que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\varphi(x) = \varphi(0) + x\psi(x)$.
2. Montrer que la limite
   $$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{|x|>\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x}\,\mathrm{d}x$$
   existe.

3. Montrer que cette expression définit une distribution d'ordre au plus 1, appelée *valeur principale de* $\frac{1}{x}$ et notée $\mathrm{vp}(\frac{1}{x})$.
4. En considérant φ_n comme à l'exercice 2, montrer que $\mathrm{vp}(\frac{1}{x})$ est d'ordre exactement 1.

Solution de l'Exercice 3

1. Par la *formule de Taylor avec reste intégral*, on écrit pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$\varphi(x) = \varphi(0) + x \int_0^1 \varphi'(xu)\,\mathrm{d}u.$$

   On peut obtenir le même résultat par le *théorème fondamental de l'analyse* : pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\varphi(x) = \varphi(0) + \int_0^x \varphi'(t)\,\mathrm{d}t$. En posant $t = xu$, on trouve le résultat recherché. Pourtant, la formule de Taylor s'avère très utile dans le calcul des distributions, donc c'est mieux de l'apprendre pour la suite.

   Posons pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\psi(x) := \int_0^1 \varphi'(xu)\,\mathrm{d}u$. Comme φ est une fonction lisse et $[0,1]$ est un compact, on conclut que ψ est elle-même une fonction lisse (en utilisant, par exemple, le *théorème de dérivabilité sous le signe de l'intégrale*). Donc pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\varphi(x) = \varphi(0) + x\psi(x),$$

   avec $\psi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})$. Cette formule sera aussi utilisé très souvent dans la suite et mérite être rétenue.
2. Soient φ une fonction test arbitraire sur $\mathbb{R}$ et $\varepsilon > 0$. Il existe $R > 0$ tel que $\operatorname{supp}\varphi \subset [-R, R]$. Alors, en utilisant le 1., on en déduit que

$$\int_{\varepsilon<|x|<R} \frac{\varphi(x)}{x}\,\mathrm{d}x = \int_{\varepsilon<|x|<R} \frac{\varphi(0)}{x}\,\mathrm{d}x + \int_{\varepsilon<|x|<R} \psi(x)\,\mathrm{d}x.$$

   La première intégrale est nulle, car $\frac{\varphi(0)}{x}$ est une fonction impaire et le domaine d'intégration est symmétrique par rapport à l'origine. Comme ψ est lisse, elle est $L^1([-R,R])$ et alors, par TCD,

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\varepsilon<|x|} \frac{\varphi(x)}{x}\,\mathrm{d}x = \int_{|x|\leqslant R} \psi(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} \frac{\varphi(x)}{x}\,\mathrm{d}x.$$

3. L'application $T : \varphi \mapsto \int_{\mathbb{R}} \frac{\varphi(x)}{x}\,\mathrm{d}x$ est linéaire en φ. En plus,

$$\left|\left\langle \mathrm{v}p\left(\frac{1}{x}\right), \varphi \right\rangle\right| = \left|\int_{-R}^{R} \psi(x)\,\mathrm{d}x\right| = \left|\int_{-R}^{R} \left(\int_0^1 \varphi'(xu)\,\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}x\right| \leqslant 2R\|\varphi'\|_{L^\infty}.$$

   Donc $\mathrm{v}p\left(\frac{1}{x}\right)$ est une distribution d'ordre au plus 1.

4. Comme dans l'exercice 2, on commence par trouver une borne inférieure à la valeur de la distribution appliqué à φ_n :

$$\left\langle \mathrm{v}p\left(\frac{1}{x}\right), \varphi_n \right\rangle = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\{\varepsilon < |x|\} \cap [\frac{1}{2n}, 2]} \frac{\varphi_n(x)}{x} \,\mathrm{d}x \geqslant \int_{\frac{1}{n}}^{1} \frac{1}{x} \,\mathrm{d}x = \log(n).$$

Donc $\left|\left\langle \mathrm{v}p\left(\frac{1}{x}\right), \varphi_n \right\rangle\right| \to \infty$ lorsque n tend vers ∞. Pourtant, $\|\varphi_n\|_{L^\infty} = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On conclut que $\mathrm{v}p\left(\frac{1}{x}\right)$ n'est pas d'ordre 0 ; elle peut être que d'ordre 1.

Exercice 4 1. Soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$. Montrer que l'expression

$$\langle T, \varphi \rangle = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{\mathbb{R}} \frac{\varphi(x)}{x - \mathrm{i}\varepsilon} \,\mathrm{d}x$$

définit une distribution T dont on identifiera la partie réelle et la partie imaginaire.

2. Donner l'ordre de T.

Solution de l'Exercice 4

1. Soit $R > 0$ tel que $\operatorname{supp} \varphi \subset [-R, R]$.

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{\varphi(x)}{x - i\varepsilon} \,\mathrm{d}x = \varphi(0)A + B,$$

où

$$A_\varepsilon = \int_{-R}^{R} \frac{1}{x - i\varepsilon} \,\mathrm{d}x \qquad \text{et} \qquad B_\varepsilon = \int_{-R}^{R} \frac{x\psi(x)}{x + i\varepsilon} \,\mathrm{d}x.$$

On calcule le premier terme. On multiplie le numérateur et le dénominateur de l'intégrande par $x + i\varepsilon$, on utilise un résultat de parité pour simplifier la formule et on fait un changement de variables $y = \frac{x}{\varepsilon}$. On obtient

$$\begin{aligned} A_\varepsilon &= \int_{-R}^{R} \frac{x + i\varepsilon}{x^2 + \varepsilon^2} \,\mathrm{d}x \\ &= i\varepsilon \int_{-R}^{R} \frac{1}{x^2 + \varepsilon^2} \,\mathrm{d}x \\ &= i \int_{-R/\varepsilon}^{R/\varepsilon} arctan'(y) \,\mathrm{d}y \\ &= i \left(arctan(R/\varepsilon) - arctan(-R/\varepsilon)\right). \end{aligned}$$

La limite de A_ε lorsque ε tend vers 0 est $i\pi$.

Pour calculer la limite du terme B_ε, on utilise le TCD. Effectivement,

$$\left|\frac{x\psi(x)}{x - i\varepsilon}\right| 1_{[-R,R]} \leqslant \left|\frac{(x^2 + i\varepsilon x)\psi(x)}{x^2 + \varepsilon^2}\right| \leqslant 2|\psi(x)| 1_{[-R,R]} \leqslant \|\varphi'\|_\infty 1_{[-R,R]},$$

car $\psi(x) = \int_0^1 \varphi'(xu)\,\mathrm{d}u$. Cela donne

$$\lim_{\varepsilon\to 0} B_\varepsilon = \int_{-R}^{R} \psi(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-R}^{R} \frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x}\,\mathrm{d}x = \int_{-R}^{R} \frac{\varphi(x)}{x}\,\mathrm{d}x = \left\langle \mathrm{v}p\left(\frac{1}{x}\right), \varphi \right\rangle.$$

Par conséquent,

$$\langle T, \varphi\rangle = \left\langle i\pi\delta_0 + \mathrm{v}p\left(\frac{1}{x}\right), \varphi \right\rangle.$$

2. Evidamment, l'ordre de T est au plus 1, car $\mathrm{v}p\left(\frac{1}{x}\right)$ est d'ordre 1 et δ_0 est d'ordre 0. Pour démontrer que l'ordre du T est différent de 0, il suffit de prendre une suite de fonctions plateau φ_n telle que $\operatorname{supp}\varphi_n \subset [\frac{1}{2n}, 2]$ et $\varphi_n = 1$ sur $[\frac{1}{n}, 1]$. On voit facielement que $|\langle T, \varphi\rangle| \geqslant log(n)$.

Exercice 5 Soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$.

1. Montrer que l'expression suivante définit une distribution T d'ordre au plus 1 :

$$\langle T, \varphi\rangle = \int_0^\infty \big(\varphi(1/t^2, \sin t) - \varphi(0, \sin t)\big)\ \mathrm{d}t.$$

2. Calculer le support de T.

Solution de l'Exercice 5

1. T est une forme linéaire sur $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^2)$.
Soit K un compact en $\mathbb{R}^2$ et soit $R > 0$ tel que $K \subset [-R, R]^2$. Soit $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^2)$ telle que $\operatorname{supp}\varphi \subset [-R, R]^2$.
Pour commencer, on utilise une astuce pour ré-écrire le terme sous l'intégrale. On note $\psi(s) = \varphi(s/t^2, sint)$, où $s \in [0, 1]$. On applique le *théorème fondamental de l'analyse* sur ψ :

$$\begin{aligned}\varphi(1/t^2, \sin t) - \varphi(0, \sin t) = \psi(1) - \psi(0) &= \int_0^1 \frac{\partial\psi}{\partial s}(s)\,\mathrm{d}s \\ &= \int_0^1 \frac{1}{t^2}\partial_1\varphi(\frac{s}{t^2}, \sin t)\,\mathrm{d}s.\end{aligned}$$

où $\partial_1\varphi$ indique la dérivée de φ dans la prémière variable. Alors, par l*inégalité triangulaire* et le *théorème de Fubini-Tonelli*, et en sachant que $\operatorname{supp}\varphi \subset [-R, R]^2$,

$$\begin{aligned}|\langle T, \varphi\rangle| &\leqslant \int_{[0,1]\times[0,\infty[} \left|\partial_1\varphi\left(\frac{s}{t^2}, \sin t\right)\right| \frac{1}{t^2}\mathrm{d}s\mathrm{d}t \leqslant \int_0^1 \left(\int_{\sqrt{sR}}^\infty \left|\partial_1\varphi\left(\frac{s}{t^2}, \sin t\right)\right| \frac{1}{t^2}\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}s \\ &\leqslant \|\partial_1\varphi\|_\infty \int_0^1 \left(\int_{\sqrt{sR}}^\infty \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}s = \sqrt{R}^{-1}\|\partial_1\varphi\|_\infty.\end{aligned}$$

T est donc une distribution d'ordre au plus 1.

2. On note $S = \left\{(\frac{1}{t^2}, \sin t) \in \mathbb{R}^2 : t \in \mathbb{R}\right\}$. Il s'agit d'une courbe paramétrée dans le plan $\mathbb{R}^2$. De manière équivalente, on peut écrire cet ensemble de la forme $S = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = \sin\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right), x > 0\right\}$. L'adhèrence de S prend la forme $\overline{S} = S \cup (\{0\} \times [-1,1])$, car tout $(x,y) = (\{0\} \times [-1,1])$ peut être approché par des éléments $(\frac{1}{t_n^2}, \sin t_n) \in S$ avec $t_n \to 0$ une suite bien choisie.

   On démontrera que $\operatorname{supp} T = \overline{S} = S \cup (\{0\} \times [-1,1])$.

   On commence par montrer que l'ouvert $\overline{S}^c$ est dans le complémentaire du spport de T. Pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^2)$ à support compact inclus dans $\overline{S}^c$, $\langle T, \varphi \rangle = 0$, par la définition de T. Donc $\operatorname{supp} T \subset \overline{S}$.

   Soit maintenant $(x,y) \in S$. On veut montrer que $(x,y) \in \operatorname{supp} T$. On doit montrer que pour tout $\varepsilon > 0$ suffissament petit, il existe une function test à support dans $B((x,y), \varepsilon)$ telle que $\langle T, \varphi \rangle \neq 0$.

   Par comodité, on demande que ε est suffissament petit tel que $B((x,y),\varepsilon) \cap (\{0\} \cap [-1,1]) = \varnothing$. De cette façon, le terme $\varphi(0, \sin t) = 0$ pour tout φ à support dans $B((x,y), \varepsilon)$.

   On fixe $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^2)$ une fonction plateau telle que $\varphi = 1$ dans $B((x,y), \varepsilon/2)$, $\operatorname{supp} \varphi \subset B((x,y), \varepsilon)$ et $\varphi \geqslant 0$. Alors

$$\langle T, \varphi \rangle = \int_0^\infty \varphi\left(\frac{1}{t^2}, \sin t\right) \mathrm{d}t \geqslant t_1 - t_0,$$

   où $x = \left(\frac{1}{t_0^2}, \sin t_0\right)$ et $t_1 = \inf_{t > t_0} \left\{\left(\frac{1}{t^2}, \sin t\right) \notin \overline{B}((x,y), \varepsilon/2)\right\}$.

   On voit que T est non nulle au voisinage de (x,y), c'est-à-dire que $S \subset \operatorname{supp} T$.

   Comme $\operatorname{supp} T$ est fermé, par adhèrence $\overline{S} \subset \operatorname{supp} T$. En conséquence, $\operatorname{supp} T = \overline{S}$.

Exercice 6 Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle ouvert et soit $x_0 \in I$. Montrer qu'il n'existe pas de fonction $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(I)$ telle que $T_f = \delta_{x_0}$.

Solution de l'Exercice 6

Supposons qu'il existe $f \in L^1_{loc}(I)$ telle que $\langle \delta_{x_0}, \varphi \rangle = \int_I f(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x$ pour tout $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(I)$.

Notons $J = I \backslash \{x_0\}$ un intervalle ouvert. Soit $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(J)$ une fonction test arbitraire. Alors $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(I)$, car pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\lim_{t \to x_0^-} \varphi^k(t) = \lim_{t \to x_0^-} \varphi^{(k)}(t) = \varphi^{(k)}(x_0)$. On a $\varphi(x_0) = 0$ et donc $\int_J f(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x = 0$. Par le *lemme de Bois-Reymund*, on en déduit que $f = 0$ p.p. dans J. Cela implique évidemment que $f = 0$ p.p. dans I.

Contradiction, car $\delta_{x_0} \not\equiv 0$ sur $\mathcal{C}_0^\infty(I)$.

Exercice 7 (Distribution d'ordre infini)

Soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$. Montrer que l'expression

$$\langle T, \varphi \rangle = \sum_{p=0}^{\infty} \varphi^{(p)}(p)$$

définit une distribution sur $\mathbb{R}$, d'ordre infini.

Solution de l'Exercice 7 T est une forme linéaire sur $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})$, car la dérivation est une application linéaire.

Soit K un compact dans $\mathbb{R}$. Il existe $R > 0$ tel que $K \subset [-R, R]$. Soit $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})$ à support dans K. On pose $p_0 := E(R)$, où $E(R)$ désigne la partie entière de R. Alors

$$|\langle T, \varphi \rangle| = \left| \sum_{p=0}^{\infty} \varphi^{(p)}(p) \right| = \left| \sum_{p=0}^{p_0} \varphi^{(p)}(p) \right| \leqslant \sum_{p=0}^{p_0} \|\varphi^{(p)}\|_\infty.$$

Donc T est une distribution.

Supposons par l'absurde que T est une distribution d'ordre $m \in \mathbb{N}$. On essaie de trouver une function test telle que le résultat de son application à T ne peut pas être controlé par la taille de ses dérivées d'ordre au plus m.

Soit ψ_0 une fonction plateau telle que $\operatorname{supp} \psi_0 \subset [-1/2, 1/2]$, $\psi_0|_{[-1/4,1/4]} \equiv 1$. On voit que $\psi_0^{(m+1)}(0) = 0$, car ψ est constante autour de 0. On note $M = \max_{0 \leqslant k \leqslant m} \|\psi_0^{(k)}\|_\infty$.

Posons

$$\psi(x) = \frac{x^{m+1}}{(m+1)!} \psi_0(x).$$

Par la *formule de Leibniz*, on voit que $\psi^{(m+1)}(0) = 1$.

Soit $\lambda \in \mathbb{N}^*$. On définit une suite des fonctions test $\varphi_\lambda(x) := \psi\left(\lambda\left(x - (m+1)\right)\right)$. Il s'agit d'une translation de $m+1$ puis d'une contraction de taille λ. Alors $\operatorname{supp} \varphi_\lambda \subset [m+1-\frac{1}{2\lambda}, m+1+\frac{1}{2\lambda}]$. En plus,

$$\varphi_\lambda^{(m+1)}(t) = \frac{\partial^{(m+1)}\psi}{\partial t^{(m+1)}}(\lambda(t-(m+1))) = \lambda^{m+1}\psi^{(m+1)}(\lambda(t-(m+1))).$$

En particulier, $\varphi_\lambda^{(m+1)}(m+1) = \lambda^{m+1}$ et pour tout $k \in \mathbb{N}\backslash\{m+1\}$, $\varphi_\lambda^{(k)}(k) = 0$, car $k \notin \operatorname{supp} \varphi_\lambda$. Donc

$$\langle T, \varphi_\lambda \rangle = \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_\lambda^{(k)}(k) = \varphi_\lambda^{(m+1)}(m+1) = \lambda^{m+1}.$$

Par contre, comme T est supposée d'ordre m, il existe C tel que

$$|\langle T, \varphi_\lambda \rangle| \leqslant C \max_{0 \leqslant k \leqslant 0} \|\varphi_\lambda^{(k)}\|_\infty \leqslant C \max_{0 \leqslant k \leqslant m} \lambda^k \|\psi^{(k)}|_\infty \leqslant CM\lambda^m.$$

Contradiction, car pour λ suffissament grand, on ne peut pas dire que $\lambda^{m+1} \leqslant CM\lambda^m$. On conclut que T ne peut pas être d'ordre fini.

Exercice 8 (Partie finie de x^α)

Soient $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ et $\varepsilon > 0$.

1. Pour $\alpha \in]-2,-1[$, montrer que :
$$\int_\varepsilon^\infty x^\alpha \varphi(x)\,\mathrm{d}x = A_\varphi \varepsilon^{\alpha+1} + R_{\varepsilon,\varphi}$$
où $A_\varphi \in \mathbb{R}$ ne dépend pas de ε et où R_ε tend vers une limite lorsque ε tend vers 0^+.
2. On pose : $\langle \mathrm{pf}(x^\alpha), \varphi\rangle = \lim_{\varepsilon\to 0^+} R_\varepsilon$. Montrer que $\mathrm{pf}(x^\alpha)$ est une distribution d'ordre au plus 1.

Solution de l'Exercice 8 Soit K un compact dans $\mathbb{R}$. Il existe $R > 0$ tel que $K \subset [-R, R]$. Soit $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})$ telle que $\operatorname{supp}\varphi \subset K$.

1. On définit $\psi := \int_0^1 \varphi'(xu)\,\mathrm{d}u$. On sait que $\psi \in \mathcal{C}^\infty$ tel que $\varphi(x) = \varphi(0) + x\psi(x)$ (voir l'exercice 3). Pour $\alpha \in]-2,-1]$ et $\varepsilon > 0$,
$$\int_\varepsilon^\infty x^\alpha\varphi(x)\,\mathrm{d}x = \int_\varepsilon^R x^\alpha\varphi(0) + x^{\alpha+1}\psi(x)\,\mathrm{d}x.$$
Or, par *intégration par parties*,
$$\int_\varepsilon^R x^\alpha\varphi(0)\,\mathrm{d}x = \frac{R^{\alpha+1}}{\alpha+1}\varphi(0) - \frac{\varepsilon^{\alpha+1}}{\alpha+1}\varphi(0).$$
On pose $A_\varphi = -\frac{\varphi(0)}{\alpha+1}$ et $R_{\varepsilon,\varphi} = \int_\varepsilon^R x^{\alpha+1}\psi(x)\,\mathrm{d}x + \frac{\varphi(0)}{\alpha+1}R^{\alpha+1}$.
Comme $\alpha \in [-2,-1]$, $x \mapsto x^{\alpha+1}$ est intégrable au voisinage de 0. Vu que ψ lisse au voisinage de 0, $x \mapsto x^{\alpha+1}\psi(x)$ est aussi intégrable autour de 0. Donc $R_{\varepsilon,\varphi}$ possède une limite lorsque ε tend vers 0^+. Cette limite est $\int_0^R x^{\alpha+1}\psi(x)\,\mathrm{d}x + \frac{\varphi(0)}{\alpha+1}R^{\alpha+1}$.
2. On vient de définir
$$\langle \mathrm{pf}(x^\alpha), \varphi\rangle = \frac{\varphi(0)}{\alpha+1}R^{\alpha+1} + \int_0^R x^{\alpha+1}\left(\int_0^1 \varphi'(xu)\,\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}x.$$
Alors $|\langle \mathrm{pf}(x^\alpha), \varphi\rangle| \leqslant C_0\|\varphi\|_\infty + C_1\|\varphi'\|_\infty$ et $\mathrm{pf}(x^\alpha)$ est une distribution d'ordre au plus 1.

Exercice 9 Soit u une fonction continue sur $\mathbb{R}^n\backslash\{0\}$ telle que
$$\forall t > 0,\ \forall x \in \mathbb{R}^n\backslash\{0\},\ u(tx) = t^{-n}\,u(x).$$

1. Soient $\varepsilon > 0$ et $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. On pose

$$I_\varepsilon(\varphi) = \int_{|x|\geqslant\varepsilon} u(x)\varphi(x)\mathrm{d}x.$$

Montrer que $\lim_{\varepsilon\to 0^+} I_\varepsilon(\varphi)$ existe pour toute $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ si et seulement si

$$\int_{|\omega|=1} u(\omega)\mathrm{d}\omega = 0. \tag{1}$$

Indication : Passer en coordonnées polaires $(r,\omega) \in]0,+\infty[\times S^{n-1}$ *pour* $|x| \geqslant \varepsilon$*. Puis utiliser la formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre* 1*.*

2. On suppose que la condition (1) est satisfaite. On pose alors, pour toute $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$,

$$\langle T,\varphi\rangle = \lim_{\varepsilon\to 0^+} I_\varepsilon(\varphi).$$

Montrer que T définit un élément de $\mathcal{D}'$ d'ordre au plus 1.

Solution de l'Exercice 9

1. Soit $R > 0$ tel que $\operatorname{supp}\varphi \subset \overline{B(0,R)}$. La fonction u est continue sur $\mathbb{R}^n\backslash\{0\}$, donc elle y est intégrable. Cela implique que $u\varphi$ est intégrable dans $\{x \in \mathbb{R}^n | \|x\| \geqslant \varepsilon\}$. En utilisant le changement de coordonées suggeré et le *théorème de Fubini-Tonelli*,

$$\begin{aligned} I_\varepsilon &= \int_{\|x\|\geqslant\varepsilon} u(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x = \int_\varepsilon^R \int_{\mathbb{S}^{n}1} u(r\omega)\varphi(r\omega)r^{n-1}\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\omega \\ &= \int_\varepsilon^R \frac{1}{r}u(\omega)\varphi(r\omega)\,\mathrm{d}\omega\mathrm{d}r. \end{aligned}$$

Par la *formule de Taylor à avec reste intégral*,

$$\varphi(r\omega) = \varphi(0) + \sum_{j=1}^n (r\omega)_j \int_0^1 \frac{\partial\varphi}{\partial x_j}(tr\omega)\,\mathrm{d}t.$$

On écris

$$I_\varepsilon = A_\varepsilon + B_\varepsilon,$$

où

$$\begin{aligned} A_\varepsilon &= \varepsilon(0)\left(\int_\varepsilon^R \frac{\mathrm{d}r}{r}\right)\left(\int_{\mathbb{S}^{d-1}} u(\omega)\,\mathrm{d}\omega\right) \\ B_\varepsilon &= \sum_{j=1}^n \int_\varepsilon^R \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \int_0^1 \omega_j u(\omega)\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}(tr\omega)\,\mathrm{d}t\mathrm{d}r\mathrm{d}\omega. \end{aligned}$$

Par TCD, B_ε admet une limite lorsque ε tend vers 0, car

$$|\omega_j u(\omega)\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}(tr\omega)| \leqslant \|u|_{\overline{B(0,R)}\backslash B(0,\varepsilon)}\|_\infty \|\varphi'\|_\infty < C_{u,R}\|\varphi'\|_\infty.$$

Par conséquent, lorsque ε tend vers 0, I_ε admet une limite si et seulement si A_ε admet une limite. Mais $\lim_{\varepsilon\to 0_+}\int_\varepsilon^R \frac{\mathrm{d}r}{r} = \infty$, donc cela revient à $\int_{\mathbb{S}^{n-1}} u(\omega)\,\mathrm{d}\omega$.

2. T est une forme linéaire sur $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$.
   Soit K un compact dans $\mathbb{R}^n$. Il existe $R > 0$ tel que $K \subset \overline{B(0,R)}$. Soit $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty \mathcal{C}_0^\infty$ à support dans K. On obtient la majoration

$$\begin{aligned} |\langle T, \varphi\rangle| &= |\sum_{j=1}^{n} \int_{\varepsilon}^{R} \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \int_0^1 \omega_j u(\omega) \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}(tr\omega)\, \mathrm{d}t\mathrm{d}r\mathrm{d}\omega| \\ &\leqslant C_{u,R} \sum_{j=1}^{n} \sup_{\|x\| \leqslant R} \left| \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \right|. \end{aligned}$$

   Donc T est une distribution d'ordre au plus 1.

Exercice 10 (Partie finie de $||x||^{-a}$)

Soient $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ et $\varepsilon > 0$.

1. Pour $a > 0$, montrer qu'il existe un polynôme en ε, $I(\varepsilon)$, tel que la limite :

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \left(\int_{||x|| \geqslant \varepsilon} ||x||^{-a} \varphi(x)\, \mathrm{d}x + I(\varepsilon) \right)$$

   existe et soit finie.
   Indication : on utilisera les coordonnées polaires ainsi que la formule de Taylor à un ordre adéquat.
2. On pose : $\langle \mathrm{pf}(||x||^{-a}), \rangle >$ la limite précédente. Montrer que $\mathrm{pf}(||x||^{-a})$ est une distribution d'ordre au plus $[a-d]+1$.

Solution de l'Exercice 10 **A faire.**