École Sup Galilée **2022-2023**
Filière MACS2
Théorie des distributions

Corrigé de la feuille de TD 3 : Distributions - Opérations.

I. Convergence dans $\mathcal{D}'$

Exercice 1 Calculer les limites, dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$, des suites de distributions suivantes :

$$A_n = \sin(nx), \quad B_n = ng(nx) \text{ où } g \in L^1(\mathbb{R}),$$

$$C_n = \frac{1}{n}\sum_{p=0}^{n-1} \delta_{\frac{p}{n}}, \quad D_n = e^{\mathrm{i}nx}\mathrm{vp}\left(\frac{1}{x}\right).$$

Solution de l'Exercice 1 Soit $\varphi \in \mathcal{D}$ de support inclus dans $[-R, R]$.

Pour A_n on a, par intégration par parties

$$\begin{aligned}\langle A_n, \varphi\rangle &= \int_{\mathbb{R}} \sin(nx)\varphi(x)\mathrm{d}x \\ &= -\int_{\mathbb{R}} \frac{\cos(nx)}{n}\varphi'(x)\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

L'intégrande est dominé par $\varphi'(x)$ qui est intégrable sur $\mathbb{R}$, donc on peut appliquer le théorème de convergence dominée et écrire :

$$\lim_{n\to+\infty}\langle A_n, \varphi\rangle = -\int_{\mathbb{R}} \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{\cos(nx)}{n}\varphi'(x)\right)\mathrm{d}x = -\int_{\mathbb{R}} 0\mathrm{d}x = 0.$$

Donc, A_n tend vers la distribution nulle.

Pour B_n, en posant $u = nx$, on a :

$$\begin{aligned}\langle B_n, \varphi\rangle &= \int_{\mathbb{R}} ng(nx)\varphi(x)\mathrm{d}x \\ &= \int_{\mathbb{R}} g(u)\varphi\left(\frac{u}{n}\right)\mathrm{d}u.\end{aligned}$$

L'intégrande est dominé par $g\|\varphi\|_\infty \in L^1$, donc on peut appliquer le théorème de convergence dominée. L'intégrande tend vers $g(u)\varphi(0)$ quand n tend vers l'infini, donc $\langle B_n, \varphi\rangle$ tend vers $\displaystyle\int_R g(u)\varphi(0)\mathrm{d}u$. En notant $G = \int_{\mathbb{R}} g(u)\mathrm{d}u$, on a donc finalement que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}(B_n) = G\delta_0$.

Pour C_n, on a, d'après la théorie classique de l'intégration selon Riemann (qui s'applique bien pour φ puisque φ est une fonction continue) :

$$\begin{aligned} \langle C_n, \varphi\rangle &= \frac{1}{n}\sum_{0\leqslant p<n}\varphi\left(\frac{p}{n}\right) \\ &\xrightarrow{n\to+\infty} \int_0^1 \varphi(x)\mathrm{d}x, \end{aligned}$$

donc C_n tend vers $T_{1\!\!1_{[0,1]}}$.

Pour D_n, à l'aide de la formule de Taylor avec reste intégral on commence par écrire $\varphi(x)$ sous la forme

$$\varphi(x) = \varphi(0) + x\psi(x) \qquad \text{où} \qquad \psi(x) = \int_0^1 \varphi'(xt)\mathrm{d}t.$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} \langle D_n, \varphi\rangle &= \lim_{\varepsilon\to0^+}\left(\int_{|x|>\varepsilon} \mathrm{e}^{inx}\frac{1}{x}\varphi(x)\mathrm{d}x\right) \\ &= \lim_{\varepsilon\to0^+}\left(\int_{|x|>\varepsilon} \mathrm{e}^{inx}\frac{1}{x}(\varphi(0)+x\psi(x))\mathrm{d}x\right) \\ &= \lim_{\varepsilon\to0^+}\left(\varphi(0)\int_{|x|>\varepsilon} \frac{\mathrm{e}^{inx}}{x}\mathrm{d}x\right) + \lim_{\varepsilon\to0^+}\left(\int_{|x|>\varepsilon} \mathrm{e}^{inx}\psi(x)\mathrm{d}x\right). \end{aligned}$$

Voyons l'intégrale de la première limite :

$$\begin{aligned} \int_{|x|>\varepsilon} \frac{\mathrm{e}^{inx}}{x}\mathrm{d}x &= \int_{|x|>\varepsilon} \frac{\cos(nx)+i\sin(nx)}{x}\,\mathrm{d}x \\ &= 2i\int_\varepsilon^{+\infty}\frac{\sin(nx)}{x}\,\mathrm{d}x \\ &\overset{t=nx}{=} 2i\int_\varepsilon^{+\infty}\frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t \\ &\xrightarrow{\varepsilon\to0} \int_0^{+\infty}\frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t \\ &= i\pi. \end{aligned}$$

La deuxième limite est $\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{inx}\psi(x)\,\mathrm{d}x$. Par le lemme de Riemann Lebesgue,

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{inx}\psi(x)\,\mathrm{d}x = 0.$$

Donc D_n tend vers $i\pi\delta_0$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ lorsque n tend vers infini.

Exercice 2 On note T_n, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la distribution associée à la fonction localement intégrable $t \mapsto \frac{\sin(nt)}{\pi t}$. Montrer que la suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ vers la distribution δ_0. *Indication : on pourra se servir de l'identité* $\int_0^\infty \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}$

Solution de l'Exercice 2 Soit $\varphi_n \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})$. Il existe $R > 0$ tel que $\operatorname{supp}\varphi \subset [-R, R]$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a

$$\langle T_n, \varphi\rangle = \int_{\mathbb{R}} \frac{\sin(nt)}{\pi t}\varphi(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-R}^{R} \frac{\sin(nt)}{\pi t}\varphi(t)\,\mathrm{d}t.$$

On définit $\psi \in \mathcal{C}^\infty$ telle que $\varphi(t) = \varphi(0) + t\psi(t)$, pour tout $t \in \mathbb{R}$. Alors

$$\langle T_n, \varphi\rangle = \frac{\varphi(0)}{\pi}\int_{-R}^{R} \frac{\sin(nt)}{t}\,\mathrm{d}t + \frac{1}{\pi}\int_{-R}^{R} \psi(t)\sin(nt)\,\mathrm{d}t.$$

Par le changement des variables $u = nt$ et par parité,

$$\int_{-R}^{R} \frac{\sin(nt)}{t}\,\mathrm{d}t = \int_{-nR}^{nR} \frac{\sin u}{u}\,\mathrm{d}u = 2\int_0^{nR} \frac{\sin u}{u}\,\mathrm{d}u.$$

Donc ce terme tend vers π lorsque n tend vers $+\infty$.

Le terme $\int_R^R \psi(t)\sin(nt)\,\mathrm{d}t = \int_\infty^\infty 1_{[-R,R]}\psi(t)\sin(nt)\,\mathrm{d}t$ tend vers 0 par le *lemme de Riemann-Lebesgue.*

On obtient que $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers δ_0 dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 3

1. Montrer que la suite de distributions $(T_n)_{n\geqslant 1}$ définie par :

$$\forall n \geqslant 1,\ T_n = n(\delta_{\frac{1}{n}} - \delta_{-\frac{1}{n}}),$$

converge dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

2. L'ordre de la limite d'une suite de distributions d'ordre m est-il toujours m ?

Solution de l'Exercice 3

1. Soit $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})$. On écrit $\varphi(x) = \varphi(0) + x\psi(x)$, avec $\psi \in \mathcal{C}^\infty$. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\langle T_n, \varphi\rangle = n\left(\varphi\left(\frac{1}{n}\right) - \varphi\left(-\frac{1}{n}\right)\right) = \psi\left(\frac{1}{n}\right) + \psi\left(-\frac{1}{n}\right).$$

Lorsque n tend vers $+\infty$, on trouve $\langle T_n, \varphi\rangle$ tend vers $2\varphi'(0)$, donc T_n tend vers $-2\delta_0'$ au sens des distributions.

2. On vient de voir un contre-exemple pour $m = 0$: une suite des distributions d'ordre 0 converge vers une distributions d'ordre 1.
   Pour m, on construit le contre-exemple suivant. Soient $\psi_m \in \mathcal{C}^\infty$ définit par $\varphi^{(m)}(x) = \varphi^{(m)}(0) + x\psi_m(x)$ et la suite $(T_n)_{n\geqslant 1}$,
$$T_n = n\left(\delta^{(m)}_{\frac{1}{n}} - \delta^{(m)}_{-\frac{1}{n}}\right).$$
   Alors T_n est d'ordre m, tant que sa limite $-2\delta_0^{(m+1)}$ est d'ordre $m+1$.

Exercice 4 Soit $N \in \mathbb{N}$. On pose :
$$F_N \ : \ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{C} \\ t & \mapsto & \frac{1}{2\pi}\sum_{k=-N}^{N} e^{\mathrm{i}kt} \end{array} \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}).$$
On note T_N la distribution associée à F_N.

1. Montrer que, pour tout $t \in \mathbb{R}\backslash 2\pi\mathbb{Z}$,
$$F_N(t) = \frac{1}{2\pi}\frac{\sin(\frac{(2N+1)t}{2})}{\sin\frac{t}{2}}.$$
2. Soit $M \in \mathbb{N}$. Soit $\varphi \in \mathcal{D}$ dont le support est inclus dans $[-(2M+1)\pi, (2M+1)\pi]$. Montrer que :
$$< T_N, \varphi > = \int_{-\pi}^{\pi} F_N(t)\phi(t)\ \mathrm{d}t,$$
   où, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\phi(t) = \sum_{k=-M}^{M}\varphi(t + 2k\pi)$.
3. En écrivant $\phi(t) = \phi(0) + t\psi(t)$ où ψ est de classe C^∞, montrer que la suite $(T_N)_{N\in\mathbb{N}}$ converge dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ vers la distribution $\sum_{n\in\mathbb{Z}}\delta_{2\pi n}$.

Solution de l'Exercice 4

1. Soit $t \in \mathbb{R}\backslash 2\pi\mathbb{Z}$. En particulier, $e^{it} \neq 1$. Alors
$$\begin{aligned}\sum_{k=-M}^{M} e^{ikt} &= e^{-iNt}\left(1 + \cdots + e^{i2Nt}\right)\\ &= e^{-iNt}\frac{e^{i(2N+1)t} - 1}{e^{it} - 1}\\ &= e^{-iNt + \frac{i(2N+1)t}{2} - \frac{it}{2}}\frac{e^{\frac{i(2N+1)t}{2}} - e^{-\frac{i(2N+1)t}{2}}}{e^{\frac{it}{2}} - e^{-\frac{it}{2}}}\\ &= \frac{\sin\left(\frac{2N+1}{2}t\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}.\end{aligned}$$

2. On note que F_N est 2π-périodique : pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$F_N(t+2\pi) = \frac{1}{2\pi}\frac{\sin\left(\frac{2N+1}{2}(t+2\pi)\right)}{\sin\left(\frac{t+2\pi}{2}\right)} = \frac{1}{2\pi}\frac{-\sin\left(\frac{2N+1}{2}t\right)}{-\sin\left(\frac{t}{2}\right)} = F_N(t).$$

Alors, en séparant l'intégrale, on a

$$\begin{aligned}\langle T_n, \varphi\rangle &= \int_{-(2M+1)\pi}^{(2M+1)\pi} F_N(t)\varphi(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \sum_{k=-M}^{M}\int_{(2k-1)\pi}^{(2k+1)\pi} F_N(t)\varphi(t)\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

On utilise un changement des variables sur chaque terme de la somme : $u = t - 2k\pi$. On obtient

$$\begin{aligned}\langle T_n, \varphi\rangle &= \sum_{k=-M}^{M}\int_{-\pi}^{\pi} F_N(u+2k\pi)\varphi(u+2k\pi)\,\mathrm{d}u \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} F_N(u)\sum_{k=-M}^{k=M}\varphi(u+2k\pi)\,\mathrm{d}u \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} F_N(u)\phi(u)\,\mathrm{d}u.\end{aligned}$$

3. Soit N fixé. En utilisant la décomposition sugéré, on voit que

$$\begin{aligned}\phi(0)\int_{-\pi}^{\pi} F_N(t)\,\mathrm{d}t &= \frac{\phi(0)}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sum_{k=-N}^{k=N} e^{ikt}\,\mathrm{d}t \\ &= \phi(0) + \frac{\phi(0)}{\pi}\sum_{k=1}^{N}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{ikt}-e^{-ikt}}{2}\mathrm{d}t \\ &= \phi(0) \\ &= \sum_{k=-M}^{M}\varphi(2k\pi).\end{aligned}$$

par parité. Le terme restant

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{t}{\sin\frac{t}{2}}\psi(t)\sin\left(\frac{2N+1}{2}t\right)\,\mathrm{d}t$$

tend vers 0 lorsque N tend vers $+\infty$. C'est une conséquence de la lemme *Riemann-Lebesque.*

En conséquent, $(T_N)_{N\in\mathbb{N}}$ converge vers $\sum_{n\in\mathbb{Z}}\delta_{2\pi n}$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

Exercice 5 Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}$. Une série de distributions $\sum T_n$ est dite convergente dans $\mathcal{D}'(\Omega)$ lorsque la suite des sommes partielles l'est.

Soit $(a_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de nombres réels.

1. Montrer que la série $\sum_{n\geqslant 1} a_n \delta_{\frac{1}{n}}$ converge dans $\mathcal{D}'(]0,+\infty[)$.
2. Montrer que si la série $\sum_{n\geqslant 1} a_n \delta_{\frac{1}{n}}$ converge dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ alors la série numérique $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ converge.
3. On suppose désormais que $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ converge. On pose pour tout $N \geqslant 1$, $A_N = \sum_{n=1}^{N} a_n$ et $A_0 = 0$, de telle manière que $a_n = A_n - A_{n-1}$ pour tout $n \geqslant 1$.
   (a) Montrer que si $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ alors la série numérique
   $$\sum_{n\geqslant 1} A_n \left(\varphi\left(\frac{1}{n}\right) - \varphi\left(\frac{1}{n+1}\right)\right)$$
   converge.
   (b) En déduire que $\sum_{n\geqslant 1} a_n \delta_{\frac{1}{n}}$ converge dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

Solution de l'Exercice 5

1. Soit $\varphi \in \mathcal{D}(]0,+\infty[)$. Il existe $R > 0$ tel que $\operatorname{supp} \varphi \subset [\frac{1}{R}, R]$. Alors
$$\left\langle \sum_{n\geqslant 1} a_n \delta_{\frac{1}{n}}, \varphi \right\rangle = \sum_{n=1}^{[R]} a_n \varphi\left(\frac{1}{n}\right) < \infty.$$
2. Soit $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})$ une fonction plateau telle que $\operatorname{supp} \varphi \subset [-2,2]$ et $\varphi = 1$ sur $[-1,1]$. Alors
$$\sum_{n\geqslant 1} a_n = \left\langle \sum_{n\geqslant 1} a_n \delta_{\frac{1}{n}}, \varphi \right\rangle < \infty.$$
3. (a) On note que
$$A_n \left(\varphi\left(\frac{1}{n}\right) - \varphi\left(\frac{1}{n+1}\right)\right) = \frac{1}{n^2+n}\left(\sum_{n\geqslant 1} A_n\right) \|\varphi'\|_\infty = \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right),$$
   sonc la série est convergente.
   (b) Soit $M > 0$ fixé. On note que $A_M = \sum_{n=1}^{M} a_n$, et donc la suite $(A_M)_{M\in\mathbb{N}}$ est

convergentie lorsque M tend vers $+\infty$. On a

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{M} A_n\left(\varphi\left(\frac{1}{n}\right)-\varphi\left(\frac{1}{n+1}\right)\right) &= \sum_{n=1}^{M} A_n\varphi\left(\frac{1}{n}\right)-\sum_{n=1}^{M} A_n\varphi\left(\frac{1}{n+1}\right)\\
&= \sum_{n=1}^{M} A_n\varphi\left(\frac{1}{n}\right)-\sum_{n=2}^{M+1} A_{n-1}\varphi\left(\frac{1}{n}\right)\\
&= \sum_{n=2}^{M}(A_n-A_{n-1})\varphi\left(\frac{1}{n}\right)+A_1\varphi(1)-A_M\varphi\left(\frac{1}{M+1}\right)\\
&= \left\langle\sum_{n=1}^{M} a_n\delta_{\frac{1}{n}},\varphi\right\rangle+(A_1-a_1)\varphi(0)-A_M\varphi\left(\frac{1}{M+1}\right),
\end{aligned}$$

d'où la convergence de $\sum_{n\geqslant 1} a_n\delta_{\frac{1}{n}}$.

II. Multiplication par une fonction C^∞

Exercice 6 Soit T une distribution sur $\mathbb{R}^n$ et f une fonction de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^n$, à valeurs dans $\mathbb{R}$.

1. Montrer que si $fT = 0$, alors le support de T est inclus dans l'ensemble $Z(f) = \{x \in \mathbb{R}^n,\ f(x) = 0\}$.

2. On suppose de plus que T est d'ordre 0. Montrer qu'alors la réciproque est vraie : si le support de T est inclus dans l'ensemble $Z(f) = \{x \in \mathbb{R}^n,\ f(x) = 0\}$ alors $fT = 0$.

3. En prenant $T = \delta'$, montrer que la réciproque est fausse en général si T n'est pas d'ordre 0.

4. Caractériser les fonctions f de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ telles que $f\delta' = 0$.

Solution de l'Exercice 6

1. Soit φ à support hors de $Z(f)$. La fonction $\phi = \varphi/f$ est alors dans $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, et on a

$$0 = \langle fT, \phi\rangle = \langle T, f\phi\rangle = \langle T, \varphi\rangle.$$

   On a donc montré que quelle que soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ à support hors de $Z(f)$ on a $\langle T, \varphi\rangle = 0$, c'est-à-dire, par définition, que $\mathrm{supp}(T) \subset Z(f)$.

2. Soit U un ouvert disjoint de $Z(f)$ et soit $\varphi \in (D)$ à support compact K inclus dans U. On a alors $\langle T, \varphi\rangle = 0$, ainsi que $\langle T, f\varphi\rangle = 0$ (puisque $f\varphi$ est aussi à support dans K), et donc $\langle fT, \varphi\rangle = 0$. On a donc montré que $fT_{|\mathbb{R}^n\setminus Z(f)} = 0$.
   À finir

Exercice 7 Soit $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Montrer que $(\sin x)T = 0$ si et seulement s'il existe une suite $(c_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ de nombres complexes telle que,

$$T = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n \delta_{n\pi}.$$

On pourra s'aider des résultats obtenus en cours sur la distribution $\mathrm{vp}\left(\frac{1}{x}\right)$.

Solution de l'Exercice 7

Si $T = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n\delta_{n\pi}$, on a bien $(\sin x)T = 0$, car $\sin(n\pi) = 0$.

On suppose que $(\sin x)T = 0$. Soit $O_n =]-\frac{3\pi}{4}+n\pi, \frac{3\pi}{4}+n\pi[$ un recouvrement localement fini de $\mathbb{R}$. Soit $(\chi_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ une partition de l'unité associée à $(O_n)_{n\in\mathbb{Z}}$. On décompose $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})$:

$$\varphi = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \varphi\chi_n := \sum_{n\in\mathbb{Z}} \varphi_n.$$

On note que $\mathrm{supp}\,\varphi_n \subset O_n$.

III. Dérivation dans $\mathcal{D}'$

Exercice 8 Montrer que, dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$,

$$\mathrm{vp}\left(\frac{1}{x}\right)' = \mathrm{pf}\left(\frac{1}{x^2}\right).$$

où, pour toute $\varphi \in \mathcal{D}$,

$$\langle \mathrm{pf}\left(\frac{1}{x^2}\right), \varphi\rangle = \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\int_{|x|>\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x^2}\,\mathrm{d}x - \frac{2\varphi(0)}{\varepsilon}\right).$$

Solution de l'Exercice 8 Soit $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})$. Il existe alors $R > 0$ tel que $\mathrm{supp}\,\varphi \subset [-R, R]$. Alors

$$\left\langle \mathrm{vp}\left(\frac{1}{x}\right)', \varphi\right\rangle = -\left\langle \mathrm{vp}\left(\frac{1}{x}\right), \varphi'\right\rangle = -\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{A\geqslant|x|\geqslant\varepsilon} \frac{\varphi'(x)}{x}\,\mathrm{d}x.$$

On utilise l'intégration par parties pour obtenir

$$\begin{aligned}\int_{A\geqslant|x|\geqslant\varepsilon} \frac{\varphi'(x)}{x}\,\mathrm{d}x &= \left[\frac{\varphi(x)}{x}\right]_{-A}^{-\varepsilon} + \left[\frac{\varphi(x)}{x}\right]_{\varepsilon}^{A} + \int_{A\geqslant|x|\geqslant\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x^2}\,\mathrm{d}x \\ &= -\frac{\varphi(\varepsilon)+\varphi(-\varepsilon)}{\varepsilon} + \int_{A\geqslant|x|\geqslant\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x^2}\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Comme $\varphi(\pm\varepsilon) = \varphi(0) \pm \varepsilon\psi(\pm\varepsilon)$,
$$\frac{\varphi(\varepsilon) + \varphi(-\varepsilon)}{\varepsilon} = 2\frac{\varphi(0)}{\varepsilon} + (\psi(\varepsilon) - \psi(-\varepsilon)),$$
d'où
$$\begin{aligned}\left\langle \mathrm{vp}\left(\frac{1}{x}\right)', \varphi \right\rangle &= \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\int_{|x|>\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x^2}\,\mathrm{d}x - 2\frac{\varphi(0)}{\varepsilon} + \psi(\varepsilon) - \psi(-\varepsilon)\right)\\ &= -\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\int_{|x|>\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x^2}\,\mathrm{d}x - 2\frac{\varphi(0)}{\varepsilon}\right)\\ &:= -\left\langle \mathrm{pf}\left(\frac{1}{x^2}\right), \varphi \right\rangle\end{aligned}$$

Exercice 9 **1.** Soit $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Calculer $(xT)'$.

2. Résoudre, dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$, l'équation différentielle :
$$xT' + T = 0.$$

Solution de l'Exercice 9

1. $(xT) = xT' + T$ par la *formule de Leibniz.*
2. Par 1., l'équation $xT' + T = 0$ est équivalente à $(xT)' = 0$. Donc il existe $C_1 \in \mathbb{R}$ tel que $xT = C_1$.
   Comme on a vu en cours, les solutions de l'équation $xT = 1$ sont de la forme $\mathrm{vp}\left(\frac{1}{x}\right) + C\delta_0$, où C est une constante arbitraire. Donc les solutions de $xT = C_1$ prennent la forme $C_1\mathrm{vp}\left(\frac{1}{x}\right) + C\delta_0$.

Exercice 10 Soit $I =]a, b[$ et f et g deux fonctions de classe C^∞ sur I. On se propose de montrer que si $T \in \mathcal{D}'(I)$ vérifie $T' + fT = g$ au sens des distributions, alors T est donnée par une fonction C^∞ sur I qui vérifie cette équation différentielle au sens usuel.

1. Trouver une solution u_0 de $u' + fu = g$ qui soit de classe C^∞ sur I.

2. Conclure en mettant toute solution de $T' + fT = g$ sous la forme $T = u_0 + S\mathrm{e}^{-F}$ où F est une primitive de f et S une distribution à déterminer.

Solution de l'Exercice 10

1. On veut résoudre l'équation $u' + fu = g$ en $\mathcal{C}^\infty$.
   Soit $x_0 \in I$ et $F(x) = \int_{x_0}^x f(t)\,dt$ une primitive de f. Alors F est lisse sur I. De plus, l'équation différentielle $u' + fu = g$ est équivalente à $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(e^F u) = e^F g$ qui a pour solution $\mathcal{C}^\infty$
   $$u_0(x) = e^{-F(x)}\left(\int_{x_0}^x e^{F(t)g(t)\,\mathrm{d}t} + C\right), \quad c \in \mathbb{R}.$$

2. Posons $T = u_0 + Se^{-F}$. Alors, on a

$$\begin{aligned} g &= T' + fT \\ &= \left(u_0' - fe^{-F}S + e^{-F}S'\right) + f\left(u_0 + e^{-F}S\right) \\ &= u_0' + fu_0 + e^{-F}(S' - fS + fS) \\ &= g + e^{-F}S' \end{aligned}$$

Donc $S' = 0$, et alors S est un constante et $T = u_0 + Ce^{-F}$.
On conclut que T est donnée par une fonction $\mathcal{C}^\infty$ qui vérifie l'équation au sens usuel.

Exercice 11 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} -2 & \text{si} \quad x \leqslant -2 \\ 5 & \text{si} \quad x \in]-2, 0] \\ 1 & \text{si} \quad x > 0. \end{cases}$$

1. Justifier que la fonction f est localement intégrable sur $\mathbb{R}$. On note T_f la distribution associée à f.

2. Calculer la dérivée de T_f dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

Solution de l'Exercice 11

1. Soit K un compact arbitraire dans $\mathbb{R}$. Alors

$$\int_K |f|\,\mathrm{d}x = \int_{K\cap]-\infty,2[} 2 + \int_{K\cap]-2,0[} 5 + \int_{K\cap]0,\infty[} 1 \leqslant 5\lambda(K) < \infty.$$

2. On utilise la formule des sauts en dimension 1 :

$$(Tf)' = T_{f'} + (5+2)\delta_{-2} + (5-1)\delta_0 = T_{f'} + 7\delta_{-2} + 4\delta_0.$$

Exercice 12 Soit $g \in C^0(I)$, telle que sa dérivée au sens des distributions g' vérifie $g' \in L^1_{\text{loc}}(I)$. Soient $a, b \in I$. Montrer que

$$(T_{g1_{[a,b]}})' = T_{g'1_{[a,b]}} + g(a)\delta_a - g(b)\delta_b.$$

Solution de l'Exercice 12 Soit $f \in L^1_{loc}$ telle que $(T_g)' = T_{f'}$. Pour tout $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(I)$, on obtient

$$\langle (T_{g1_{[a,b]}})', \varphi\rangle = -\langle T_{g1_{[a,b]}}, \varphi'\rangle = -\int_a^b g(x)\varphi'(x)\,\mathrm{d}t.$$

Or, pour presque tout $x \in I$, $g(x) = g(a) + \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$.

D'où

$$\begin{aligned}\langle (T_{g1_{[a,b]}})', \varphi\rangle &= -\int_a^b g(a)\varphi'(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^b \left(\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t\right)\varphi'(x)\,\mathrm{d}x \\ &= -g(a)\left(\varphi(b)-\varphi(a)\right) - \int_a^b\int_a^x f(t)\varphi'(t)\,\mathrm{d}t\mathrm{d}x\end{aligned}$$

Par le *théorème de Fubini-Tonelli*,

$$\int_a^b\int_a^x f(t)\varphi'(t)\,\mathrm{d}t\mathrm{d}x = \int_a^b f(t)\left(\int_t^b \varphi'(x)\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}t = \int_a^b f(t)\left(\varphi(b)-\varphi(t)\right).$$

Finalement,

$$\begin{aligned}\langle (T_{g1_{[a,b]}})', \varphi\rangle &= -g(a)\left(\varphi(b)-\varphi(a)\right) - \varphi(b)\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t + \int_a^b f(t)\varphi(t)\,\mathrm{d}t \\ &= -\left(g(a)+\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right)\varphi(b) + g(a)\varphi(a) + \int_a^b f(t)\varphi(t)\,\mathrm{d}t \\ &= -g(b)\varphi(b) + g(a)\varphi(a) + \int_I \left(f(t)1_{[a,b]}(t)\right)\varphi(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \langle T_{f1_{[a,b]}}, \varphi\rangle + g(a)\langle \delta_a, \varphi\rangle - g(b)\langle \delta_b, \varphi\rangle.\end{aligned}$$

Exercice 13 On considère l'opérateur différentiel $P = \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + a\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} + b$, $a, b \in \mathbb{R}$, agissant sur $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

Soient f et g deux fonctions de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ telles que $Pf = Pg = 0$, $f(0) = g(0)$ et $f'(0) - g'(0) = 1$. On considère la fonction h définie par

$$\forall x \in \mathbb{R},\ h(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si} \quad x \leqslant 0 \\ g(x) & \text{si} \quad x > 0. \end{cases}$$

Soit enfin T la distribution définie par,

$$\forall \varphi \in \mathcal{D},\ < T, \varphi >= -\int_{\mathbb{R}} h(x)\varphi(x)\mathrm{d}x.$$

Montrer que $PT = \delta_0$, au sens des distributions.

Solution de l'Exercice 13 Par définition, $T = T_{-h}$, où $h \in L^1_{loc}$. Soit $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})$. En utilisant les propriétés de la multiplication $\mathcal{C}^\infty$, on voit que

$$\langle bT, \varphi\rangle = \langle T, b\varphi\rangle = -\int_{-\infty}^0 bf\varphi - \int_0^\infty bg\varphi.$$

En plus, en utilisant les propriétés de la dérivation, l'intégration par parties, et le fait que $f(0) = g(0) = 0$,

$$\begin{aligned}\langle a\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}T, \varphi\rangle = -\langle T, a\varphi'\rangle &= \int_{-\infty}^{0} fa\varphi' + \int_{0}^{\infty} ga\varphi' \\ &= -\int_{-\infty}^{0} f'a\varphi - \int_{0}^{\infty} g'a\varphi.\end{aligned}$$

Finalement

$$\begin{aligned}\langle \frac{\mathrm{d}^2T}{\mathrm{d}x^2}, \varphi\rangle = \langle T, \varphi''\rangle &= -\int_{-\infty}^{0} f\varphi'' - \int_{0}^{\infty} g\varphi'' \\ &= \int_{-\infty}^{0} f'\varphi' + \int_{0}^{\infty} g'\varphi' = -\int_{-\infty}^{0} f''\varphi - \int_{0}^{\infty} g''\varphi + f'(0)\varphi(0) - g'(0)\varphi(0) \\ &= -\int_{-\infty}^{0} f''\varphi - \int_{0}^{\infty} g''\varphi + \varphi(0).\end{aligned}$$

Donc

$$\langle PT, \varphi\rangle = -\int_{-\infty}^{0} PF\varphi - \int -0^{\infty} Pg\varphi + \varphi(0) = \langle \delta_0, \varphi\rangle.$$

Exercice 14

1. Résoudre l'équation différentielle $2xu' - u = 0$ sur $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+^*)$, puis sur $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}_-^*)$.
2. Soit $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ une solution de l'équation $2xT' - T = 0$. Soit T_1 sa restriction à $\mathcal{D}'(\mathbb{R}_+^*)$ et soit T_2 sa restriction à $\mathcal{D}'(\mathbb{R}_-^*)$.
   (a) Calculer T_1 et T_2.
   (b) Soit $S := T - \tilde{T}_1 - \tilde{T}_2 \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$, où $\tilde{T}_1$ et $\tilde{T}_2$ sont les prolongements en $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ de T_1, respectivement T_2. Vérifier que le support de S est inclus dans $\{0\}$.
   (c) Soit $R = \sum_{k=0}^{p} a_k\delta^{(k)} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ où les a_k sont dans $\mathbb{C}$. Montrer que : $2xR' - R = 0 \iff R = 0$.
   (d) En déduire les solutions dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ de l'équation $2xT' - T = 0$.
3. Résoudre, dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$, l'équation différentielle $2xT' - T = \delta_0$.

Solution de l'Exercice 14

1. Comme l'équation $2xu' - u = 0$ est singulière en 0, on cherche des solutions $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$, puis sur $\mathbb{R}_-^*$.
   On commence sur $\mathbb{R}_+^*$. Par la *méthode de séparation des variables*, tant que $u \neq 0$, on trouve comme solutions $u(x) = C_1\sqrt{x}$, $C_1 \in \mathbb{R}$. De même, sur $\mathbb{R}_-^*$, $u(x) = C_2\sqrt{-x}$, $C_2 \in \mathbb{R}$.

2. (a) On veut montrer que T_1 doit forcement prendre la forme $C\sqrt{x}$. Voici l'astuce. On définit la distribution $S_1 \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}_+^*)$ telle que $S_1 = \frac{T_1}{\sqrt{x}}$. Alors

$$S_1' = \frac{T_1}{\sqrt{x}} - \frac{T_1}{2x\sqrt{x}} = \frac{2xT_1' - T_1}{2x\sqrt{x}} = 0,$$

par hypothèse. Il existe alors une constante $C_1 \in \mathbb{R}$ telle que $S_1 = C_1$ au sens des distributions, ce qui revient à dire $T_1 = C_1\sqrt{x}$.

De manière similaire, on montre que $T_2 = C_2\sqrt{-x}$, où $C_2 \in \mathbb{R}$.

(b) Dans ce cas, la distribution $S = T - \tilde{T}_1 - \tilde{T}_2$ est la composante “singulière" de T.

Soit $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})$ une fonction test arbitraire à support inclus dans $\mathbb{R}_+^*$. Alors

$$\begin{aligned}\langle S, \varphi\rangle &= \langle T - \tilde{T}_1, \varphi\rangle - \langle \tilde{T}_2, \varphi\rangle \\ &= \langle (T - \tilde{T}_1)|_{\mathbb{R}_+^*}, \varphi|_{\mathbb{R}_+^*}\rangle \\ &= \langle T_1 - T_1, \varphi|_{\mathbb{R}_+^*}\rangle \\ &= 0\end{aligned}$$

et donc $\mathbb{R}_+^* \subset (\operatorname{supp} S)^c$. Par le même raisonnement, on montre que $\mathbb{R}_-^* \subset (\operatorname{supp} S)^c$. Donc $\operatorname{supp} S \subset \{0\}$.

Comme $S = T - \tilde{T}_1 - \tilde{T}_2$ a le support soit singulier, soit null, alors S est forcement une combinaison linéaire de dérivées de Dirac ou sinon tout simplement la distribution nulle. On remarque en plus que S vérifie la même équation différentielle que T.

(c) Il est évident que $R = 0$ est une solution de l'équaton $2xT' - T = 0$. Réciproquement, on pose $R = \sum_{k=0}^p a_k\delta^{(k)}$. Soit $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})$ une fonction test arbitraire.

$$\begin{aligned}\langle 2xR', \varphi\rangle &= -2\langle R, (x\varphi)'\rangle \\ &= -2\langle R, x\varphi' + \varphi\rangle \\ &= -2\sum_{k=0}^p a_k(-1)^k(x\varphi' + \varphi)^{(k)}(0) \\ &= 2\sum_{k=0}^p a_k(-1)^{k+1}(k+1)\varphi^{(k)}(0),\end{aligned}$$

où on a utilisé la relation $(x\varphi' + \varphi)^{(k)} = k\varphi^{(k+1)} + \varphi^{(k+1)}$. Donc

$$\langle 2xR' - R, \varphi\rangle = 2\sum_{k=0}^p a_k((-1)^{k+1}(k+1) - 1).$$

Pour que R soit une solution de $2xT' - T = 0$, il faut que $a_k = 0$ pour tout $k \in [[0, p]]$, car $(-1)^{k+1}(k+1) - 1 \neq 0$. Alors $R = 0$.

(d) Par les points précédents, on obtient que toutes les solutions $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ de $2xT'-T=0$ doivent prendre la forme $T=\tilde{T}_1+\tilde{T}_2$, car le reste S à support ponctuel vu en 2b. est nul, par le raisonnement de 2c.

3. On s'intéresse à l'équation inhommogène $2x'T-T=\delta_0$. Il suffit de trouver une solution particulière. On essaie $T=C\delta_0$, avec C une constante à trouver. En effet, lorsque $C=1$, $2x\delta_0'-\delta_0=\delta_0$, ce qui est équivalent à $(2x\delta_0)'=0$ (vrai, car $2x\delta_0=0$). Alors toutes les solutions de $2xT'-T=\delta_0$ prennent la forme $\tilde{T}_1+\tilde{T}_2+\delta_0$.

Exercice 15 Soit h un C^1-difféomorphisme de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Soit T l'application linéaire de $C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$ dans $\mathbb{C}$ définie par :

$$\forall\varphi\in\mathcal{D},\ <T,\varphi>=\int_{\mathbb{R}}\varphi(x,h(x))\,\mathrm{d}x.$$

1. Montrer que $T\in\mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$. Quel est son ordre ?

2. Déterminer le support de T.

3. En déduire qu'il n'existe pas de fonction continue sur $\mathbb{R}^2$ telle que T soit la distribution associée à cette fonction.

4. Calculer, au sens des distributions, $(\partial_x+h'(x)\partial_y)T$.

Solution de l'Exercice 15

1. T est une application linéaire sur $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^2)$.
Soit K un compact dans $\mathbb{R}$. Il existe $R>0$ tel que $\varphi\subset[-R,R]^2$. Alors

$$\langle T,\varphi\rangle\int_{-R}^{R}\varphi(x,h(x))\,\mathrm{d}x\leqslant 2R\|\varphi\|_\infty,$$

et donc T est une distribution d'ordre 0 sur $\mathbb{R}^2$.

2. Soit $A=\{(t,h(t))\,:\,t\in\mathbb{R}\}$ une courbe paramétrée dans $\mathbb{R}^2$. On montrera que $\operatorname{supp}T=A$.
Soit $\varphi\in\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^2)$ une fonction test arbitraire telle que $\operatorname{supp}\varphi\subset A^c$. Alors $\varphi(x,h(x))=0$ pour tout $x\in\mathbb{R}$, et donc $\langle T,\varphi\rangle=0$. On en déduit que $\operatorname{supp}T\subset A$.
Soit $(t_0,h(t_0))\in A$. Il existe une fonction plateau $\varphi\in\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^2)$ telle que $\operatorname{supp}\varphi\in B((t_0,h(t_0)),1)$ et $\varphi=1$ sur $B((t_0,h(t_0)),1/2)$. Alors,

$$|\langle T,\varphi\rangle|=\int_{tj_0}^{t_1}\mathrm{d}t=t_1-t_0>0,$$

où $t_1=\inf_{t\geqslant t_0}\{(t,h(t))\in B((t_0,h(t_0)),1/2)\}$. Donc $\operatorname{supp}T=\overline{A}=A$.

3. Lorsque $T=T_f$ et $f\in\mathcal{C}^0$, $\operatorname{supp}T=\operatorname{supp}f$. Cela veut dire que $f=0$ sur A^c ; par continuité, $f=0$ sur $\mathbb{R}^2$ et donc $T=0$. Contradiction.

4. Soit $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^2)$. On note que

$$\begin{aligned}\langle(\partial_x + h'(x)\partial_y)T, \varphi\rangle &= -\langle T, \partial_x\varphi + \partial_y(h'(x)\varphi)\rangle = \langle T, \partial_1\varphi + h'(x)\partial_2\varphi\rangle \\ &= -\int_{\mathbb{R}^2} \partial_1\varphi(x,y) + h'(x)\partial_2\varphi(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.\end{aligned}$$

On définit $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, où $\psi(t) = \varphi(t, h(t))$. Comme φ est à support compact, ψ l'est aussi. Alors

$$\psi'(t) = \partial_1\varphi(t, h(t)) + h'(t)\partial_2\varphi(t, h(t)),$$

d'où

$$\langle(\partial_1 + h'(x)\partial_2)T, \varphi\rangle = -\int_{\mathbb{R}} \psi'(x)\mathrm{d}x = 0,$$

car ψ est à support compact.
Donc $(\partial_x + h'(x)\partial_y)T = 0$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$.

Exercice 16 Équation de Cauchy-Riemann

On considère sur $\mathbb{R}^2\backslash\{0\}$ la fonction donnée par :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2\backslash\{0\},\ f(x,y) = (x + \mathrm{i}y)^{-1}.$$

1. Montrer que $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^2)$.

2. Soit $\bar\partial$ l'opérateur de Cauchy-Riemann défini par : $\bar\partial = \frac{1}{2}(\partial_x + \mathrm{i}\partial_y)$. Calculer $\bar\partial f$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$.

Indication : on pensera à effectuer un changement de variables en coordonnées polaires.

Solution de l'Exercice 16

1. $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^2)$ car $\|x\|^{-\alpha}$ est intégrable en 0 lorsque $\alpha < 2$.
2. Soit $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^2)$. On a

$$\begin{aligned}\langle\bar\partial T_f, \varphi\rangle &= -\frac{1}{2}\langle T_f, \partial_x\varphi\rangle - \frac{i}{2}\langle T_f, \partial_y\varphi\rangle \\ &= -\frac{1}{2}\int_{R^2} \frac{1}{x+iy}\left(\partial_x\varphi + i\partial_y\varphi\right)(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= -\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{x^2+y^2}\left(x\partial_x\varphi + y\partial_y\varphi\right)(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &\quad - \frac{i}{2}\int_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{x^2+y^2}\left(-y\partial_x\varphi + x\partial_y\varphi\right)(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.\end{aligned}$$

On pose $x = r\cos\theta$ et $y = r\sin\theta$. On définit $\tilde\varphi(r,\theta) = \varphi(r\cos\theta, r\sin\theta)$ et on obtient

$$\langle\bar\partial T_f, \varphi\rangle = -\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\int_{\mathbb{R}_+} \frac{1}{r^2} r\partial_r\tilde\varphi(r,\theta)\,r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta - \frac{i}{2}\int_0^{2\pi}\int_{\mathbb{R}_+} \frac{1}{r^2}(\partial_\theta\tilde\varphi(r,\theta))\,r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta,$$

car

$$\partial_r \tilde{\varphi}(r,\theta) = \partial_r \varphi(r\cos\theta, r\sin\theta) = \cos\theta \partial_x \varphi + \sin\theta \partial_y \varphi = \frac{1}{r}(x\partial_x\varphi + y\partial_y\varphi)$$

et

$$\partial_\theta \tilde{\varphi}(r,\theta) = \partial_\theta \varphi(r\cos\theta, r\sin\theta) = -r\sin\theta\partial_x\varphi + r\cos\theta\partial_y\varphi = x\partial_y\varphi - y\partial_x\varphi.$$

Soit $\varepsilon > 0$.

$$\begin{aligned}
\langle \overline{\partial} T_f, \varphi\rangle &= \lim_{\varepsilon\to 0}\left[-\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} \partial_r\tilde{\varphi}(r,\theta)\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta - \frac{i}{2}\int_\varepsilon^\infty \frac{1}{r}\int_0^{2\pi}\partial_\theta\tilde{\varphi}\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\right] \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\tilde{\varphi}(0,\theta)\,\mathrm{d}\theta - \frac{i}{2}\lim_{\varepsilon\to 0}\int_\varepsilon^\infty \frac{1}{r}\tilde{\varphi}(r,2\pi) - \tilde{\varphi}(r,0)\,\mathrm{d}r \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\varphi(0,0)\,\mathrm{d}\theta \\
&= \pi\varphi(0,0).
\end{aligned}$$

D'où $\overline{\partial} f = \pi\delta_{(0,0)}$ dans le sens des distributions.

Exercice 17 Calculer les dérivées partielles de la distribution

$$\mathbf{1_{x+y>0}} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^{\mathbf{2}}).$$

Solution de l'Exercice 17 En utilisant le *théorème de Fubini-Tonelli*,

$$\begin{aligned}
\left\langle \frac{\partial}{\partial x} T_{1_{x+y>0}}, \varphi \right\rangle &= -\int_{\mathbb{R}^2} 1_{x+y>0}\partial_x\varphi(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= -\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-y}^{\infty}\partial_x\varphi(x,y)\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y \\
&= \int_{\mathbb{R}}\varphi(-y,y)\,\mathrm{d}y.
\end{aligned}$$

On obtient le même résultat pour $\frac{\partial}{\partial y}T_{1_{x+y>0}}$.