Université Sorbonne Paris Nord, Institut Galilée
Licence de mathématiques - L3
Année universitaire 2022-2023, second semestre

**Intégration & Probabilités**
**Fiche de TD n°5**
**Théorème de convergence dominée**

**Exercice 1.** Etudier la convergence des suites suivantes dont le terme général est donné ci-dessous :

a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1+nx}{(1+x)^n}\,\mathrm{d}x.$

b) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(\pi x)}{1+x^n}\,\mathrm{d}x.$

c) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \sin\left(\frac{x}{n}\right)\frac{n}{x(1+x^2)}\,\mathrm{d}x.$

d) $\displaystyle\int_0^{n} \left(1-\frac{x}{n}\right)^n x^m\,\mathrm{d}x$, où $m \in \mathbb{N}$.

e) $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)e^{-n\sin^2(x)}\,\mathrm{d}x$, où $f$ est supposée Lebesgue-intégrable.

**Exercice 2.** Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on définit la fonction $f_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ par $f_n(x) = \mathbb{1}_{[n,n+1]}(x)$.

1. Peut-on appliquer le théorème de convergence dominéee pour déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(\int_{\mathbb{R}} f_n(x)\mathrm{d}x\right)$ ?
2. Déterminer cette limite par un calcul direct.
3. Mêmes questions pour la suite des $g_n(x) = n\mathbb{1}_{[n,n+1]}(x)$ et pour la suite des $h_n(x) = \dfrac{1}{n}\mathbb{1}_{[n,n+1]}(x)$.

**Exercice 3.** Soit $\mu$ une mesure finie sur un espace $X$ muni d'une tribu $\mathcal{A}$. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions mesurables convergeant presque partout vers une fonction $f$. On suppose qu'il existe une constante $C > 0$ telle que $|f_n| \leqslant C$ pour tout $n$. Démontrer que

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\int_X f_n\mathrm{d}\mu\right) = \int_X f\mathrm{d}\mu.$$

**Exercice 4.** Soit $f : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction continue définie par $f(x) = \dfrac{\sin(x)}{\mathrm{e}^x - 1}$.

1. Démontrer que $f$ est Lebesgue-intégrable.

2. Démontrer l'égalité suivante, pour tout $x > 0$ :

$$f(x) = \sum_{n>0} \mathrm{e}^{-nx} \sin(x).$$

3. À l'aide des questions précédentes, démontrer que

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{\mathrm{e}^x - 1} \mathrm{d}x = \sum_{n>0} \frac{1}{n^2+1}.$$

**Exercice 5.** Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré et soit $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction intégrable. Démontrer que

$$\lim_{n \to +\infty} \Big( n \cdot \mu\big(\{|f| \geqslant n\}\big)\Big) = 0.$$

**Exercice 6.** Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré et $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction intégrable.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose $A_n := \{x \in X \ : \ |f(x)| \geqslant n\}$. Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} \left( \displaystyle\int_{A_n} f \mathrm{d}\mu \right)$.
2. Montrer la propriété suivante :
   Pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que, pour tout $A \in \mathcal{A}$,
   $$\mu(A) < \delta \Longrightarrow \int_A f \mathrm{d}\mu < \epsilon$$
3. Dans le cas où $(X, \mathcal{A}, \mu) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$, en déduire que l'application
   $$x \mapsto F(x) := \int_{]-\infty, x]} f \mathrm{d}\lambda$$
   est uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

**Exercice 7.** Soit $(X, \mathcal{A})$ un espace mesurable muni d'une mesure de probabilité $\mu$. Soit $f : X \longrightarrow \mathbb{R}_+$ une fonction mesurable. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose

$$I_n := \int_X \frac{f^n}{1+f^n} \mathrm{d}\mu.$$

Déterminer la limite des $I_n$.