Université Sorbonne Paris Nord, Institut Galilée
Licence de mathématiques - L3
Année universitaire 2021-2022, second semestre

Intégration & Probabilités
Fiche de TD n°6
Intégrales à paramètres

Exercice 1. Pour tout $t \geqslant 0$ on pose $f(t) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^3+t^3}\,\mathrm{d}x$.

1. Démontrer que f est bien définie et continue sur $\mathbb{R}^+$.
2. Démontrer que f est décroissante.
3. Déterminer $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} f(t)$.

Exercice 2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on pose

$$F(x) := \int_0^{+\infty} \frac{\sin(xt)}{t} \mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t.$$

1. Justifier que F est définie sur $\mathbb{R}$.
2. Justifier que F est de classe C^1.
3. Calculer F'.
4. En déduire une autre expression de F.

Exercice 3. On pose

$$G(x) := \int_0^1 \frac{t^{x-1}}{1+t}\mathrm{d}t.$$

1. Déterminer le domaine de définition $\mathcal{D}$ de G.
2. Démontrer que G est continue sur $\mathcal{D}$.
3. Calculer $G(x) + G(x+1)$ pour tout $x \in \mathcal{D}$.
4. En déduire un équivalent de G en 0.
5. Déterminer $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}(G(x))$.

Exercice 4. L'objectif de l'exercice est d'étudier quelques propriétés de la *tranformée de Fourier*, qui associe à toute fonction $f \in L^1(\mathbb{R})$ la fonction $\hat{f}$ définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\xi} f(x)\mathrm{d}x.$$

1. Démontrer que $\hat{f}$ est bien définie sur $\mathbb{R}$ et continue.
2. Démontrer que si la fonction $x \longmapsto xf(x)$ est intégrable, alors $\hat{f}$ est de classe C^1, et déterminer la dérivée de $\hat{f}$.

3. On veut démontrer que si $f \in C^1$ et $f' \in L^1(\mathbb{R})$ alors $\widehat{f'}(\xi) = \mathrm{i}\xi\hat{f}(\xi)$. (Attention : ne pas confondre $(\hat{f})'$ et $\widehat{f'}$!)
   (a) À l'aide de l'hypothèse $f' \in L^1(\mathbb{R})$, démontrer que f a une limite finie en $+\infty$ et en $-\infty$.
   (b) En déduire, à l'aide de l'hypothèse $f \in L^1(\mathbb{R})$, que f tend vers 0 en $+\infty$ et en $-\infty$.
   (c) En déduire le résultat cherché à l'aide d'une intégration par parties.

Exercice 5. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x > 0$ on pose

$$I_n(x) := \int_0^{+\infty} \frac{1}{(x^2+t^2)^n} \mathrm{d}t.$$

1. Justifier l'existence de $I_n(x)$ pour tout n et tout x.
2. Calculer $I_1(x)$.
3. Démontrer que, pour tout n, $I_n \in C^1(]0, +\infty[)$, et déterminer une relation entre I_n' et I_{n+1}.
4. En déduire une suite réelle $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ telle que, pour tout $x > 0$, on a :

$$I_n(x) = \frac{\lambda_n}{x^{2n-1}}.$$

Exercice 6. On pose

$$F(x) := \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-xt}}{1+t^2} \mathrm{d}t.$$

1. Démontrer que $F(x)$ est défini pour tout $x > 0$.
2. Déterminer la limite de F en $+\infty$.
3. Démontrer que F est solution de l'équation différentielle $y'' + y = 1/x$ définie sur $\mathbb{R}_*^+$.