Université Sorbonne Paris Nord, Institut Galilée
Licence de mathématiques - L3
Année universitaire 2022-2023, second semestre

Intégration & Probabilités
Fiche de TD n°7
Mesure produit, changement de variables

Exercice 1. Soit $0 < a < b$ deux réels. On considère l'espace $A =]0, +\infty[\times]a, b[$ muni de sa tribu borélienne et de la mesure λ_2 produit des mesures de Lebesgue.

1. Démontrer que l'application f définie sur A par $f(x, y) = e^{-xy}$ est intégrable.
2. En utilisant f, calculer la valeur de
$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} dx.$$

Exercice 2. On considère $\mathbb{R}^2$ muni de sa tribu borélienne et de la mesure λ_2 produit des mesures de Lebesgue de $\mathbb{R}$. On note $D =]0, +\infty[^2$.

1. Calculer
$$\int_D \frac{1}{(1 + x^2 y)(1 + y)} d\lambda_2(x, y).$$
2. En déduire les valeurs de
$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x^2 - 1} dx \quad \text{et} \quad \int_0^1 \frac{\ln(x)}{x^2 - 1} dx.$$

Exercice 3. On considère les espaces mesurés $([0, 1], \mathcal{B}([0, 1]), \lambda)$ (où λ est la mesure de Lebesgue) et $([0, 1], \mathcal{P}([0, 1]), \mu)$ (où μ est la mesure de comptage). On pose $D := \{(x, x) \ : \ x \in [0, 1]\}$.

1. Démontrer que D est un borélien de $[0, 1]^2$. En déduire que $D \in \mathcal{B}([0, 1]) \otimes \mathcal{P}([0, 1])$.
2. Calculer les intégrales
$$\int \left(\int \mathbb{1}_D(x, y) d\lambda(x) \right) d\mu(y) \quad \text{et} \quad \int \left(\int \mathbb{1}_D(x, y) d\mu(y) \right) d\lambda(x).$$

   Expliquer.

Exercice 4. Soit f et g deux fonctions intégrables sur $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n), \lambda)$, où λ est la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^n$. On définit $h : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ par $h(x,y) = f(x-y)g(y)$.

1. Démontrer que h est intégrable sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$.
2. En déduire que pour presque tout $x \in \mathbb{R}^n$ la quantité $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} h(x,y)d\lambda(y)$ est bien définie.

   On appelle *produit de convolution de f et de g* l'application définie sur $\mathbb{R}^n$ par
   $$f * g(x) = \int_{\mathbb{R}^n} h(x,y)d\lambda(y) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)d\lambda(y)$$
   si cette intégrale est définie, et par $f * g(x) = 0$ sinon.
3. Démontrer que $f * g$ est intégrable sur $\mathbb{R}^n$ et que
   $$\int_{\mathbb{R}^n} |f * g| d\lambda \leqslant \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f| d\lambda\right) \left(\int_{\mathbb{R}^n} |g| d\lambda\right).$$
4. À l'aide d'un changement de variable, démontrer que $f * g = g * f$ presque partout sur $\mathbb{R}^n$.

Exercice 5. Le but de l'exercice est de calculer $I := \displaystyle\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-x^2/2} \mathrm{d}x$.

1. On pose $J := \displaystyle\int_{\mathbb{R}^2} \mathrm{e}^{-(x^2+y^2)/2} \mathrm{d}\lambda_2(x,y)$, où λ_2 est la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^2$. Démontrer que $J = I^2$.
2. Calculer J à l'aide du changement de variables en coordonnées polaires.
3. En déduire la valeur de I.

Exercice 6. La boule $B_n(r)$ de $\mathbb{R}^n$ est définie pour tout $r \geqslant 0$ par
$$B_n(r) := \left\{ (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \ : \ \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \leqslant r^2 \right\}.$$
De même, la sphère $S_n(r)$ de $\mathbb{R}^n$ est définie pour tout $r \geqslant 0$ par
$$S_n(r) := \left\{ (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \ : \ \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = r^2 \right\}.$$
Le but de l'exercice est de calculer le volume $V_n(r)$ de $B_n(r)$ ainsi que la surface $A_n(r)$ de $S_n(r)$.

1. Démontrer que $V_n(r) = r^n V_n(1)$.

2. On pose
$$I_n := \int_0^{\pi} \sin^n(\theta)\mathrm{d}\theta.$$
Démontrer que $V_n(1) = I_n \cdot V_{n-1}(1)$.
3. Démontrer que $I_n = \dfrac{n-1}{n} I_{n-2}$ pour tout $n \geqslant 2$.
4. En déduire une expression de $V_n(1)$ en fonction de n.
5. Démontrer que, pour tout $n \geqslant 2$, on a $V_n(r) = \dfrac{1}{n} A_{n-1}(r)$.
6. En déduire une expression de $A_n(1)$ en fonction de n.

Exercice 7. ***(Fonction Gamma.)***

On définit, pour $a > 0$, $b > 0$:
$$\Gamma(a) := \int_0^{+\infty} u^{a-1} e^{-u} du$$
et
$$I(a,b) := \int_0^1 t^{a-1}(1-t)^{b-1}\, dt.$$
Enfin, on note $A := \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x > 0,\ y > 0\right\}$.

1. *Montrer que pour toute fonction mesurable positive f définie sur A, et $a > 0$, $b > 0$, on a*
$$\int_A f(x+y)\, x^{a-1} y^{b-1} \lambda_2(d(x,y)) = I(a,b) \int_0^{+\infty} u^{a+b-1} f(u)\, du.$$
2. *En déduire l'identité, pour a et b strictement positifs :*
$$\Gamma(a)\Gamma(b) = \Gamma(a+b)\, I(a,b).$$
Puis, pour tout $a > 0$:
$$\Gamma(a+1) = a\Gamma(a)$$
et enfin, pour tout $n \in \mathbb{N}$:
$$\Gamma(n+1) = n!$$

Exercice 8. ***(Formule de Stirling.)*** *Le but de cet exercice est de montrer l'équivalent :*

$$\Gamma(x+1) \sim \left(\frac{x}{e}\right)^x \sqrt{2\pi x}$$

quand x tend vers $+\infty$.

1. *Montrer, pour tout $x > -1$, $x - \ln(1+x) = x^2 \int_0^1 \frac{u}{1+xu} du$ (on fera un changement de variable élémentaire).*
2. *En déduire que la fonction q définie sur $]-1, +\infty[$ par*

$$\begin{cases} \frac{x-\ln(1+x)}{x^2} & si \;\; x \neq 0 \\ \frac{1}{2} & si \;\; x = 0 \end{cases}$$

   est continue et décroissante.

3. *En effectuant le changement de variable $t := x + u\sqrt{x}$, montrer que pour tout $x > 0$:*

$$\Gamma(x+1) = \sqrt{x}\left(\frac{x}{e}\right)^x \int_{-\sqrt{x}}^{+\infty} \left(1 + \frac{u}{\sqrt{x}}\right)^x e^{-u\sqrt{x}} du$$

4. *On pose, pour tout $x > 0$ et $u \in \mathbb{R}$:*

$$f(u,x) = 1_{[-\sqrt{x},+\infty[}(u) \left(1 + \frac{u}{\sqrt{x}}\right)^x e^{-u\sqrt{x}}$$

   Déterminer la limite, à u fixé de $f(u,x)$ quand x tend vers l'infini.

5. *Calculer, pour $u > -\sqrt{x}$, $-\ln(f(u,x))$ en fonction de la fonction q définie à la première question.*
6. *En déduire que, pour $u \geq 0$, $x \mapsto f(u,x)$ est décroissante sur $]0, +\infty[$ et que, pour $u < 0$, $x \mapsto f(u,x)$ est croissante.*
7. *En déduire ensuite, pour $x \geq 1$:*

$$f(u,x) \leq e^{-\frac{u^2}{2}} 1_{\mathbb{R}_-}(u) + (1+u)e^{-u} 1_{\mathbb{R}_+}(u)$$

8. *Conclure.*