Université Sorbonne Paris-Nord Année 2022-2023
L3 - MAP & AED - Intégration et Probabilités **Fiche de TD n° 9**

Indépendance

Exercice 1 Soit $(A_n)_{n\geqslant 1}$ une suite d'événements d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Montrer que

1. $\limsup_{n\to\infty} A_n$ est l'ensemble des $\omega \in \Omega$ tels que $\mathbb{1}_{A_n}(\omega)$ ne tend pas vers 0 quand $n \to \infty$.
2. $\liminf_{n\to\infty} A_n$ est l'ensemble des $\omega \in \Omega$ tels que $\mathbb{1}_{A_n}(\omega)$ tend vers 1 quand $n \to \infty$.

Exercice 2 Soit $(X_i)_{i\geqslant 1}$ une suite de tirages Pile/Face indépendants et équilibrés. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note R_n le nombre maximal de Pile consécutifs parmi les n premiers tirages.

1. Montrer que pour tout $k \leqslant n$, $\mathbb{P}(R_n = k) \leqslant \frac{n+1-k}{2^k}$. En déduire que $\mathbb{P}(R_n \geqslant 3\log_2(n)) \leqslant \frac{2}{n^2}$, où $\log_2$ est le logarithme en base 2.
2. En déduire que presque sûrement il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout $n \geqslant n_0$, $R_n < 3\log_2(n)$.

Exercice 3

1. Montrer en utilisant les fonctions *génératrices* que si X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes, telles que $X \sim \text{Poisson}(\lambda_1)$ et $Y \sim \text{Poisson}(\lambda_2)$, alors $X + Y \sim \text{Poisson}(\lambda_1 + \lambda_2)$.
2. Montrer en utilisant les fonctions *caractéristiques* que si X et Y sont indépendantes, telles que $X \sim \mathcal{N}(\mu_1, \sigma_1^2)$ et $Y \sim \mathcal{N}(\mu_2, \sigma_2^2)$, alors $X + Y \sim \mathcal{N}(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$.

Exercice 4 Théo fait du tir à l'arc sur une cible circulaire de rayon 1. On suppose que Théo est suffisamment maladroit pour que le point d'impact M de coordonnées (X, Y) soit uniformément distribué sur la cible. On note $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leqslant 1\}$.

1. Quelle est la densité du couple (X, Y) ?
2. Déterminer les lois marginales de X et de Y.
3. Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?

Exercice 5 Soit (X,Y) un couple de variables aléatoires réelles, de densité de probabilité

$$g(x,y) = \begin{cases} 1/2x & \text{si } (x,y) \in D, \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

avec

$$D = \left\{ (x,y) \ , \ 0 < y \leqslant x \text{ et } 0 < y \leqslant \frac{1}{x} \right\}.$$

1. Donner une représentation graphique de D.
2. Déterminer les densités des variables aléatoires X et Y. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?

Exercice 6 On dit qu'une variable aléatoire X suit une loi de Pareto de paramètre $\alpha > 0$ si, pour tout $x \geqslant 1$, $\mathbb{P}(X > x) = x^{-\alpha}$.

1. Démontrer que cette propriété caractérise effectivement la loi de X.
2. Montrer que X suit une loi à densité, et préciser cette densité.
3. Pour quelles valeurs de α la variable X est-elle d'espérance finie ?
4. Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant toutes les deux une loi de Pareto de paramètre α. Montrer que, si $t \geqslant 1$, alors

$$\mathbb{P}(XY > t) = \int_1^{\infty} \mathbb{P}(X > t/y) \, \mathrm{d}\mathbb{P}_Y(y).$$

En déduire que, pour tout $t \geqslant 1$, $\mathbb{P}(XY > t) = t^{-\alpha}(1 + \alpha \ln(t))$.

Exercice 7 On considère deux variables aléatoires réelles X et Y indépendantes telles que $\mathbb{P}_X$ ait pour densité $3x^2 \mathbf{1}_{[0,1]}(x)$ et $\mathbb{P}_Y$ soit la loi uniforme sur $[0,1]$. Déterminer la loi de la variable aléatoire $Z := XY$.

Exercice 8 Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes de loi $\mathcal{N}(0,1)$. Déterminer la loi de $(X+Y, X-Y)$ et montrer que $X+Y$ et $X-Y$ sont indépendantes.

Exercice 9 Soit (X,Y) un couple aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^2$, de densité

$$f(x,y) = ce^{-x}e^{-y}, \quad 0 < x < y < \infty.$$

1. Calculer c.
2. X et Y sont-elles indépendantes ?
3. Calculer les lois marginales de X et Y, et nommer la loi de X.
4. Calculer $\mathbb{P}(Y > 2X)$.

Exercice 10 Soit (X, Y) un couple de densité

$$f(x, y) = \exp(-(x + y))\mathbf{1}_{\mathbb{R}_+^*}(x)\mathbf{1}_{\mathbb{R}_+^*}(y).$$

On considère les variables U et V définies par $U = X + Y$, $V = X/Y$.

1. Les variables X, Y sont-elles indépendantes ? Préciser leurs lois.
2. Déterminer la densité du couple (U, V).
3. En déduire les densités de U et V.
4. Calculer $\mathbb{E}(U)$ et $\mathrm{Var}(U)$. Que peut-on dire des moments de V ?

Exercice 11 Un vecteur aléatoire $(X, Y) \in \mathbb{R}^2$ est dit *gaussien* si toute combinaison linéaire $aX + bY$, avec a, b des réels, suit une loi gaussienne ou est une v.a. p.s. constante.

1. Montrer que si X et Y sont des v.a. gaussiennes indépendantes alors (X, Y) est un vecteur gaussien.
2. Dans ce qui suit on suppose que (X, Y) est un vecteur gaussien.
   (a) Montrer que ses lois marginales sont des lois gaussiennes.
   (b) Calculer la fonction caractéristique de (X, Y) en fonction de $\mathbb{E}[X], \mathbb{E}[Y], \mathrm{Var(X)}, \mathrm{Var(Y)}$ et $\mathrm{Cov}(X, Y)$.
   (c) En déduire que X et Y sont indépendantes si et seulement si $\mathrm{Cov}(X, Y) = 0$.
3. Montrer que la conclusion de la question précédente n'est plus valable si on remplace l'hypothèse "(X, Y) est un vecteur gaussien" par l'hypothèse plus faible "X et Y sont des v.a. gaussiennes". Vous pourrez par exemple considérer le cas où $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$ et $Y = BX$, avec B une v.a. indépendante de X, telle que $\mathbb{P}(B = 1) = \mathbb{P}(B = -1) = 1/2$.