Feuille 6 : Int & Proba

$\boxed{\text{Exo 1}}$:

$\forall t \geq 0,\ f(t) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^3+t^3}\,dx$

- $t \leftarrow$ paramètre
- $x \leftarrow$ variable d'intégration.

1) f bien définie car $\frac{1}{1+x^3+t^3}$ intégrable : $\left|\frac{1}{1+x^3+t^3}\right| \leq \frac{1}{1+x^3}$

~~Vorsgratzeund~~ qui est intégrable par le critère de Riemann.

Par le théorème de continuité sous l'intégrale, f continue, car

- $\begin{bmatrix} [0,+\infty[\to \mathbb{R} \\ t \longmapsto \frac{1}{1+x^3+t^3} \end{bmatrix}$ est continue (continuité par rapport au paramètre t)
- $\left|\frac{1}{1+x^3+t^3}\right| \leq \frac{1}{1+x^3}$ intégrable sur $[0,+\infty[$. (domination)

2) Soient $0 \leq t_1 \leq t_2 < \infty$; alors $0 \leq \frac{1}{1+x^3+t_2^3} \leq \frac{1}{1+x^3+t_1^3}$

et donc $f(t_2) \leq f(t_1)$.

3)
- $\frac{1}{1+x^3+t^3}$ mesurable
- $\frac{1}{1+x^3+t^3} \to 0$ lorsque $t \to \infty$
- $\left|\frac{1}{1+x^3+t^3}\right| \leq \frac{1}{1+x^3}$ intégrable sur $[0,+\infty[$

Donc, par le théorème de convergence dominée,

$$\lim_{t \to +\infty} f(t) = \int_0^{+\infty} \lim_{t\to\infty} \frac{1}{1+x^3+t^3}\,dt = 0.$$

$\boxed{\text{Exo 2}}$: $F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(xt)}{t} e^{-t}\,dt$

- $x \leftarrow$ paramètre $x \in \mathbb{R}$
- $t \leftarrow$ variable d'intégration

1) F est bien définie car $t \mapsto \frac{\sin(xt)}{t} e^{-t}$ est intégrable sur $[0,+\infty[$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

- $x = 0 \Rightarrow$ ~~Florgau~~. $\frac{\sin(xt)}{t} e^{-t} = 0$.
- $x \neq 0 \Rightarrow \left|\frac{\sin(xt)}{t} e^{-t}\right| \leq \left|x \cdot \frac{\sin(xt)}{xt} e^{-t}\right| \leq |x| e^{-t}$ intégrable dans $[0,+\infty[$

car $|\sin(xt)| \leq |xt|$.

2. • F est bien définie, car $\frac{1}{1+x^3+t^3}$ intégrable (voir 1)

• $x \mapsto \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\sin(xt)}{t}e^{-t}\right)$ existe et <u>est continue</u> (condition nécessaire (*) pour avoir $F \in \mathcal{C}^1$ et pas que F dérivable). ~~car~~ En particulier,

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\sin(xt)}{t}e^{-t}\right) = \frac{\cancel{t}\cos(xt)}{\cancel{t}}e^{-t}$$ (dérivabilité par rapport au paramètre x)

• $|\cos(xt)e^{-t}| \leq e^{-t}$ intégrable sur $[0,+\infty[$. (domination de la dérivée)

Donc par le <u>théorème de dérivabilité sous l'intégrale</u>, F est dérivable et même $\mathcal{C}^1$, grâce à (*).

3. $F'(x) = \int_0^{+\infty} \underbrace{\cos(xt)}_{u}\,\underbrace{e^{-t}}_{v'}\,dt$ par 2).

$$\overset{IPP}{=} \left[\cos(xt)(-e^{-t})\right]_{t=0}^{t=+\infty} - \int_0^{+\infty} -\sin(xt)\cdot x\cdot(-e^{-t})\,dt$$

$$= 1 - \int_0^{+\infty} x\sin(xt)e^{-t}\,dt$$

$$\overset{IPP}{=} 1 - \underbrace{\left[x\sin(xt)(-e^{-t})\right]_{t=0}^{t=+\infty}}_{=0} + \int_0^{+\infty} x^2\cos(xt)(-e^{-t})\,dt$$

$$= 1 - x^2F'(x)$$

Donc $F'(x) = \frac{1}{1+x^2}$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

4) $F(x) = \arctan(x) + C$, $C \in \mathbb{R}$.

$F(0) = \int_0^{+\infty} 0\,dt = 0$ et donc $C = 0$.

$\boxed{\text{Exo3}}$ $G(x) = \int_0^1 \frac{t^{x-1}}{1+t}\,dt$ • $x \leftarrow$ paramètre
• $t \leftarrow$ variable d'intégration.

1) G est bien définie lorsque $t \mapsto \frac{t^{x-1}}{1+t}$ est intégrable.

• lorsque $t \to 1$, pas de souci

• lorsque $t \to 0$, $\frac{t^{x-1}}{1+t} \simeq t^{x-1}$ intégrable si et seulement si $x > 0$, par le critère de Riemann.

Donc $\mathcal{D} = \mathbb{R}_+^*$.

2) G est continue par le théorème de continuité sous l'intégrale, car :

- $\left|\frac{t^{x-1}}{1+t}\right| \leq |t^{x-1}|$ intégrable dans $[0,1]$.
- $x \longmapsto \frac{t^{x-1}}{1+t}$ continue par rapport à x. $\left(\frac{t^{x-1}}{1+t} = \frac{e^{(x-1)\ln(t)}}{1+t}\right)$

3) $G(x)+G(x+1) = \int_0^1 \frac{t^{x-1}+t^x}{1+t}\,dt = \int_0^1 t^{x-1}\frac{1+t}{1+t}\,dt \underset{x\neq 0}{=} \left[\frac{t^x}{x}\right]_0^1 = \frac{1}{x}$

4) Par 3, $G(x) = \frac{1}{x} - G(x+1)$.

Par continuité, autour de 0, $G(x) = \frac{1}{x} - G(1) + o(x)$

$G(1) = \int_0^1 \frac{1}{1+t}\,dt = \ln(2)$

5) Comme :
- $\frac{t^{x-1}}{1+t}$ mesurable
- $\lim_{x\to\infty} \frac{t^{x-1}}{1+t} = 0$ p.p dans $[0,1]$ (sauf dans 1).
- $\left|\frac{t^{x-1}}{1+t}\right| \leq |t^{x-1}|$ intégrable

Par le TCD, $\lim_{x\to\infty} G(x) = \int_0^1 0\,dt = 0$.

$\boxed{\text{Exo 4}}$ 1) $\hat{f}$ est bien définie car $|e^{-ix\xi}f(x)| \leq |f(x)|$ intégrable.

$\hat{f}$ est continue par le théorème de continuité sous l'intégrale, car
- $\xi \longmapsto e^{-ix\xi}f(x)$ continue
- $|e^{-ix\xi}f(x)| \leq |f(x)|$ intégrable

2) $\hat{f}$ est $\mathcal{C}^1$ par le théorème de dérivabilité sous l'intégrale, car.
- $\hat{f}$ bien définie
- $\xi \longmapsto \frac{\partial}{\partial \xi}(e^{-ix\xi}f(x)) = -ixe^{-ix\xi}f(x)$ existe et est continue
- $|-ixe^{-ix\xi}f(x)| \leq |xf(x)|$ intégrable

En particulier, $\hat{f}'(\xi) = \int_{\mathbb{R}} -ixe^{-ix\xi}f(x)\,dx = -i\int_{\mathbb{R}} e^{-ix\xi}xf(x)\,dx = i\hat{h}(\xi)$,

où $h(x) = xf(x)$.