Université Paris 13, année universitaire 2022 – 23
L3 MAP & AED
Intégration et probabilités

Corrigé du contrôle continu n°2, mercredi 5 avril 2023

Le CC est noté sur 17 points, qui seront ramenés sur 20 en multipliant la note par 1.2.

Question 1 (Total : 3 points) Soit N une variable aléatoire réelle de densité $f_N(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$, $x \in \mathbb{R}$. On note $M = \frac{1}{N^2}$.

1. (0.5) Quel est le nom de la loi de N ?
2. (1) Soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue bornée arbitraire. Montrer que
$$\mathbb{E}[\varphi(M)] = 2\int_{\mathbb{R}_+^*} \varphi\left(\frac{1}{x^2}\right)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx.$$
3. (1.5) Après avoir fait un changement de variables adéquat, en déduire la densité de la variable aléatoire M par la méthode des fonctions test.

Corrigé de Question 1

1. *$N \sim \mathcal{N}(0,1)$, la loi normale des paramètres $(0,1)$.*
2. *On obtient*
$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\varphi(M)] &= \mathbb{E}\left[\varphi\left(\frac{1}{N^2}\right)\right]\\ &= \mathbb{E}[\varphi(M)]\\ &= \int_{\mathbb{R}^*} \varphi\left(\frac{1}{x^2}\right)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx\\ &= 2\int_{\mathbb{R}_+^*} \varphi\left(\frac{1}{x^2}\right)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx,\end{aligned}$$
où on a utilisé d'abord le théorème de transfer et puis la parité de l'intégrand $\varphi\left(\frac{1}{x^2}\right)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$.
3. *On utilise le changement de variables $\Phi : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+^*$, $\Phi : x \mapsto \frac{1}{x^2}$. Effectivemment, Φ est $\mathcal{C}^1$ dans $\mathbb{R}_+^*$ et son inverse $\Phi : y \mapsto \frac{1}{\sqrt{y}}$ l'en est aussi. La valeur absolue du jacobien de Φ est $|J_\Phi| = \frac{2}{x^3}$. Donc*
$$\mathbb{E}[\varphi(M)] = \int_{\mathbb{R}_+^*} \varphi(y)\frac{1}{\sqrt{2\pi y^3}}e^{-\frac{1}{2y}}\,dy = \int_{\mathbb{R}} \varphi(y)\mathbb{1}_{\mathbb{R}_+^*}(y)\frac{1}{\sqrt{2\pi y^3}}e^{-\frac{1}{2y}}\,dy.$$
Par la méthode des fonction test, on conclut que la densité de $\mathbb{1}_{\mathbb{R}_+^*}(y)\frac{1}{\sqrt{2\pi y^3}}e^{-\frac{1}{2y}}$.

Question 2 (Total : 5 points) Soit (X,Y) une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^2$. On suppose que la loi de (X,Y) est

$$\lambda\mu e^{-\lambda x-\mu y}\mathbb{1}_{\mathbb{R}_+^2}(x,y)\,d\lambda_2(x,y)$$

avec $\lambda>0, \mu>0$. On pose $U=\min(X,Y)$.

1. (1.5) Déterminer les densités des lois X et Y et donner leurs noms.
2. (1) Montrer que pour toute fonction $\varphi:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ continue et bornée
$$\mathbb{E}[\varphi(U)]=\lambda\mu\int_{\{0\leq x\leq y\}}\varphi(x)e^{-(\lambda x+\mu y)}\,dxdy+\lambda\mu\int_{\{0\leq y\leq x\}}\varphi(y)e^{-(\lambda x+\mu y)}\,dxdy$$
3. (1) Argumenter soigneusement le fait que
$$\mathbb{E}[\varphi(U)]=\int_{\mathbb{R}_+}\lambda\varphi(x)e^{-\lambda x}\int_x^\infty\mu e^{-\mu y}\,dy\,dx+\int_{\mathbb{R}_+}\mu\varphi(y)e^{-\mu y}\int_y^\infty\lambda e^{-\lambda x}\,dx\,dy.$$
4. (1.5) En déduire que U a une densité et la déterminer. Quelle est le nom de la loi de U ?

Corrigé de Question 2

1. *En intégrant par y dans $\mathbb{R}$, on obtient la loi marginale $X\sim\exp(\lambda)$ de densité $f_X(x)=\mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(x)\lambda e^{-\lambda x}$. De même, en intégrant par x dans $\mathbb{R}$, on trouve $Y\sim\exp(\mu)$ avec $f_Y(y)=\mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(y)\mu e^{-\mu y}$.*
2. *Par la règle de Chasles,*
$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\varphi(\min(X,Y))]&=\int_{\{x\leq y\}}\varphi(x)\lambda\mu e^{-\lambda x-\mu y}\mathbb{1}_{\mathbb{R}_+^2}(x,y)\,d\lambda_2(x,y)\\&\quad+\int_{\{y\leq x\}}\varphi(y)\lambda\mu e^{-\lambda x-\mu y}\mathbb{1}_{\mathbb{R}_+^2}(x,y)\,d\lambda_2(x,y)\end{aligned}$$
3. *Il s'agit d'appliquer le théorème de Fubini-Tonelli (les intégrands sont positifs et mésurables, les mesures sont σ-finies)*
4. *Comme*
$$\int_{\mathbb{R}_+}\lambda\varphi(x)e^{-\lambda x}\int_x^\infty\mu e^{-\mu y}\,dy\,dx=\lambda\int_{\mathbb{R}_+}\varphi(x)e^{-(\lambda+\mu)x}\,dx$$
et
$$\int_{\mathbb{R}_+}\mu\varphi(y)e^{-\mu y}\int_y^\infty\lambda e^{-\lambda x}\,dx\,dy=\mu\int_{\mathbb{R}_+}\varphi(y)e^{-(\lambda+\mu)y}\,dy$$
alors
$$\mathbb{E}[\varphi(U)]=(\lambda+\mu)\int_{\mathbb{R}_+}\varphi(z)e^{-(\lambda+\mu)z}\,dz$$
et donc par la méthode des fonctions test, $U\sim\exp(\lambda+\mu)$ à densité $f_U(u)=\mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(u)(\lambda+\mu)e^{-(\lambda+\mu)u}$.

Question 3 (Total : 4 points) Soit $(E, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré et $h : (E, \mathcal{A}, \mu) \to (\mathbb{R}_+, \mathcal{B}(\mathbb{R}_+))$ une fonction mesurable. On suppose que la mesure μ est σ-finie. Soit $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ une fonction croissante $\mathcal{C}^1$ telle que $g(0) = 0$.

1. (1) Justifier que
$$g\left(h(x)\right) = \int_{\mathbb{R}_+} g'(t) \mathbb{1}_{\{t \leq h(x)\}}(t)\, dt.$$
2. (1.5) Montrer que
$$\int_E (g \circ h)(x)\, d\mu(x) = \int_{\mathbb{R}_+} g'(t) \mu\left(\{h \geq t\}\right)\, dt.$$
3. (0.5) En fixant g de manière convenable, montrer que
$$\int_E h\, d\mu = \int_{\mathbb{R}_+} \mu(\{h \geq t\})\, dt.$$
4. (1) En déduire que pour toute variable aléatoire réelle intégrable X définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$,
$$\mathbb{E}[|X|] = \int_{\mathbb{R}_+} \mathbb{P}(|X| \geq t)\, dt.$$

Corrigé de Question 3

1. *Il s'agit de la formule donné par le théorème fondamental de l'analyse appliqué à la fonction g entre 0 et $h(x)$, étant donné que $g(0) = 0$.*
2. *Par 1.,*
$$\int_E (g \circ h)(x)\, d\mu(x) = \int_E \int_{\mathbb{R}_+} g'(t) \mathbb{1}_{\{t \leq h(x)\}}(t)\, dt\, d\mu(x)$$
Comme l'intégrand est positif mesurable, alors par le théorème de Fubini-Tonelli on peut inverser l'ordre d'intégration et obtenir le résultat.
3. *On fixe $g(t) = t$ dans 2. Le résultat est direct.*
4. *On fixe $h(x) = |X(x)|$ et $\mu = \mathbb{P}_X$ dans 3.*

Question 4 (Total : 5 points)

1. Soit X une variable aléatoire réelle.
   (a) (1) Rappeler la définition de la fonction *caractéristique* de X et son ensemble de définition.
   (b) Calculer la fonction caractéristique de X dans les cas suivants :
      (i) (0.75) X suit une loi exponentielle $\exp(\lambda)$, $\lambda > 0$
      (ii) (0.75) X suit une loi uniforme sur l'intervalle $[-a, a]$, $a > 0$.

2. Soit Y une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$.
   (a) (1) Rappeler la définition de la fonction *génératrice* de Y.
   (b) Calculer la fonction génératrice de Y et donner son ensemble de définition dans les cas suivants :
      (i) (0.75) Y suit une loi de Bernoulli de paramètre $p \in [0,1]$
      (ii) (0.75) Y suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.

Corrigé de Question 4

1. (a) La fonction caractéristique d'un variable aléatoire $X : \Omega \to \mathbb{R}$ est la fonction $\phi_X : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ telle que $\phi_X(\xi) = \mathbb{E}[e^{i\xi X}]$.

(b) i. Pour $X \sim \exp(\alpha)$,

$$\phi_X(\xi) = \int_0^\infty \alpha e^{-(\alpha - i\xi)x}\,dx = \left[\frac{\alpha e^{-(\alpha-i\xi)x}}{-(\alpha - i\xi)}\right]_0^\infty = \frac{1}{1-\frac{i\xi}{\alpha}}$$

ii. Pour $X \sim \mathcal{U}[-a,a]$, $a > 0$. Pour $\xi = 0$, on voit que $\phi_X(\xi) = 0$, par définition. Pour $\xi \neq 0$, on utilise un argument de parité :

$$\phi_X(\xi) = \frac{1}{2a}\int_{-a}^{a} e^{i\xi t}\,dt = \frac{1}{a}\int_0^a \cos(\xi t)\,dt = \frac{1}{a}\left[\frac{\sin(\xi t)}{\xi}\right]_0^a = \frac{\sin(a\xi)}{a\xi}.$$

2. (a) La fonction génératrice d'une variable aléatoire $X : \Omega \to \mathbb{N}$ est la fonction G_X

$$G_X(s) = \mathbb{E}[s^X].$$

G_X est définie au moins sur $[-1,1]$

(b) i. Pour $X \sim Bern(p)$, $G_X(s) = s^0\mathbb{P}(X=0) + s^1\mathbb{P}(X=1) = (1-p) + ps$. Elle est définie sur $\mathbb{R}$.

ii. Pour $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$, $G_X(s) = \sum_{k=0}^\infty s^k e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} = e^{\lambda(s-1)}$. Elle est définie sur $\mathbb{R}$.

Remarques générales sur les copies

1. À revoir le théorème de changement des variables : on utilise **toujours** le jacobien en valeur absolue.
2. Dans beaucoup des copies, vous oubliez la fonction indicatrice dans des densités (par exemple, dans celle de la loi exponentielle). Cette erreure ammène souvent à encore des résultats faux dans la suite (voir la Question 4.1.(b)i.).
3. A revoir les hypothèses de Fubini versus Fubini-Tonelli ; dans le premier cas, il faut argumenter l'intégrabilité sur $\mathbb{R}^2$. Souvent, Fubini-Tonelli est plus facile à appliquer, car il faut juste vérifier que l'intégrant est mesurable et positif.
4. Ennoncer toujours le résultat que vous utilisez (théorème fondamental de l'analyse, théorème du transfer etc).
5. La fonction génératrice est définie au moins sur $[-1,1]$, mais elle peut être définie pour d'autres valeurs en $\mathbb{R}$. À vérifier en chaque cas.
6. Traiter le cas $\xi = 0$ séparemment dans Question 4.1.(b)ii.