Université Sorbonne Paris-Nord, 2022–23
Licence de mathématiques 3ème année
Intégration et probabilities

Fiche de TD n°9 : Indépendance

Corrigé de l'exercice 1

1. Par définition, $\limsup_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty}\left(\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k\right)$. Donc si $\omega \in \limsup_{n\to\infty} A_n$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\omega \in \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$; autrement dit, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $m_n \in \mathbb{N}$, $m_n \geqslant n$, tel que $\mathbb{1}_{A_{m_n}}(\omega) = 1$. Il existe une sous-suite $(m_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $\mathbb{1}_{A_{m_n}}(\omega) \to 1$ lorsque $n \to \infty$. Donc soit $\lim_{n\to\infty} \mathbb{1}_{A_n}(\omega) = 1$, soit $\lim_{n\to\infty} \mathbb{1}_{A_n}$ n'existe pas.
2. Par définition, $\omega \in \liminf_{n\to\infty} A_n$ veut dire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\omega \in \bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k$; de manière équivalente, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $\omega \in \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k$. On obtient donc $\mathbb{1}_{A_m}(\omega) = 1$, pour tout $m \geqslant n$.

Corrigé de l'exercice 2

1. On définit les événements A_i, $i \in [\![1, n-k+1]\!]$, où

$$A_i = \{\text{il y a } k \text{ tirages de Pile consecutives à partir de } i\text{ème tirage}\}$$

Comme chaque tirage est indépendent, $\mathbb{P}(A_n) = \frac{1}{2^k}$. Comme $\{R_n = k\} \subset \bigcup_{i=1}^{n-k+1} A_i$, alors $\mathbb{P}(R_n = k) \leqslant \frac{n-k+1}{2^k}$. On en déduit que

$$\mathbb{P}(R_n \geqslant 3\log_2(n)) = \sum_{k=\lceil 3\log_2(n)\rceil}^{n} \mathbb{P}(R_n = k) \leqslant \sum_{k=\lceil 3\log_2(n)\rceil}^{n} \frac{n-k+1}{2^k} \leqslant n \sum_{k=\lceil 3\log_2(n)\rceil}^{n} \frac{1}{2^k}$$

où $\lceil 3\log_2(n)\rceil$ est l'arrondi supérieur de $3\log_2(n)$ (le plus petit entier supérieur ou égal à $3\log_2(n)$).

$$\mathbb{P}(R_n \geqslant 3\log_2(n)) \leqslant n \times \frac{1}{2^{3\log_2(n)}} \times \frac{1}{2^{\lceil 3\log_2(n)\rceil - 3\log_2(n)}} \sum_{k=0}^{n-\lceil 3\log_2(n)\rceil} \frac{1}{2^k} \leqslant n \times \frac{1}{n^3} \times 2 \leqslant \frac{2}{n^2}.$$

2. On définit les événements $E_n = \{R_n \geqslant 3\log_2(n)\}$. Comme

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(E_n) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^3} < \infty$$

(voir 1.), alors $\mathbb{P}(\limsup E_n) = 0$ par le *lemme de Borel-Cantelli*.
Donc p.s. $\{n \in \mathbb{N}, \omega \in E_n\}$ est fini. Autrement dit, sauf dans un nombre fini de n, $R_n < 3\log_2(n)$ presque sûrement.

Corrigé de l'exercice 3

1. On rapelle que la fonction génératrice de la variable aléatoire X_i qui suit la loi de Poisson de paramètre λ_i est la suivante : pour tout $s \in \mathbb{R}$

$$G_{X_i}(s) = \mathbb{E}[s^{X_i}] = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda_i} \frac{\lambda_i^k}{k!} s^k = e^{-\lambda_i} e^{\lambda_i s} = e^{\lambda_i (s-1)}.$$

On utilise le fait que $G_{X+Y}(s) = G_X(s)G_Y(s)$, par indépendence de X et Y. Donc

$$G_{X+Y}(s) = G_X(s)G_Y(s) = e^{\lambda_1(s-1)} e^{\lambda_2(s-1)} = e^{(\lambda_1+\lambda_2)(s-1)}.$$

Une autre méthode :
Pour tout $s \in \mathbb{R}$,

$$G_{X+Y}(s) = \mathbb{E}[s^{X+Y}] = \sum_{n=0}^{\infty} s^n \mathbb{P}(X+Y=n) = \sum_{n=0}^{\infty} s^n \left(\sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(X=k, Y=n-k) \right).$$

Par l'independence de X et Y et par la *formule de binôme de Newton*, on obtient

$$\begin{aligned} G_{X+Y}(s) &= \sum_{n=0}^{\infty} s^n \left(\sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(X=k)\mathbb{P}(Y=n-k) \right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} s^n \sum_{k=0}^{n} \frac{\lambda_1^k \lambda_2^{n-k} e^n}{k!(n-k)!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} s^n \frac{e^n}{n!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \lambda_1^k \lambda_2^{n-k} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} s^n \frac{(\lambda_1+\lambda_2)^n e^n}{n!} \\ &= G_{\mathcal{P}(\lambda_1+\lambda_2)}(s). \end{aligned}$$

2. Pour tout $\xi \in \mathbb{R}$, par indépendence, on voit que

$$\phi_{X+Y}(\xi) = \phi_X(\xi)\phi_Y(\xi) = e^{i\mu_1\xi - \frac{\xi^2\sigma_1^2}{2}} e^{i\mu_2\xi - \frac{\xi^2\sigma_2^2}{2}} = e^{i(\mu_1+\mu_2)\xi - \frac{\xi^2(\sigma_1+\sigma_2)^2}{2}}$$

et donc $X+Y \sim \mathcal{N}(\mu_1+\mu_2, \sigma_1^2+\sigma_2^2)$.

Corrigé de l'exercice 4

1. $$f_{(X,Y)}(x,y) = \frac{\mathbb{1}_D(x,y)}{\pi}$$

Effectivement, pour vérifier que cette fonction est bien une densité, on utilise un changement de variables en coordonnées polaires et le *théorème de Fubini-Tonelli*,

$$\int_{\mathbb{R}^2} \frac{\mathbb{1}_D(x,y)}{\pi}\, dxdy = \frac{1}{2\pi} \int_0^1 \int_0^{2\pi} r\, drd\theta = 1.$$

2. La densité de la loi marginale X vérifie

$$f_x(x) = \int_{\mathbb{R}} f_{X+Y}(x,y)\,dy = \frac{1}{\pi}\int_{\{y, x^2+y^2 \leqslant 1\}} dy = \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1+x^2}} dy = \frac{2\sqrt{1-x^2}}{\pi}.$$

tant que $|x| \leqslant 1$. Donc $f_X(x) = \mathbb{1}_{[-1,1]}(x)\frac{2\sqrt{1-x^2}}{\pi}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

De même, $f_Y(y) = \mathbb{1}_{[-1,1]}(y)\frac{2\sqrt{1-y^2}}{\pi}$ pour tout $y \in \mathbb{R}$.

3. Non, car

$$\frac{\mathbb{1}_D(x,y)}{\pi} \neq \frac{4\sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}\mathbb{1}_{[-1,1]^2}(x,y)}{\pi^2}.$$

Corrigé de l'exercice 5

1. dessin
2. La densité de la variable aléatoire X est $g_X(x) = \int_{\mathbb{R}} g(x,y)\,dy$.
   - Si $x < 0$, alors $g_X(x) = 0$.
   - Si $x \in]0,1[$, alors $g_X(x) = \int_0^x g(x,y)\,dy = \int_0^x \frac{1}{2x}\,dy = \frac{1}{2}$.
   - Si $x \in [1,\infty[$, alors $g_X(x) = \int_0^{\frac{1}{x}} g(x,y)\,dy = \int_0^{\frac{1}{x}} \frac{1}{2x}\,dy = \frac{1}{2x^2}$.

   La densité de la variable aléatoire Y est $g_Y(y) = \int_{\mathbb{R}} g(x,y)\,dx$.
   - Si $y < 0$, alors $g_Y(y) = 0$.
   - Si $y \in [0,1[$, alors $g_Y(y) = \int_y^{1/y} \frac{1}{2x}\,dx = \frac{\ln\left(\frac{1}{y}\right) - \ln(y)}{2} = -\ln(y)$.
   - Si $y \geqslant 1$, alors $g_Y(y) = 0$.

   Comme $g(x,y) \not\equiv g_X(x)g_Y(y)$, X et Y ne sont pas indépendantes.

Corrigé de l'exercice 6

1. On note que $\mathbb{P}(X > 1) = 1$, et donc $\mathbb{P}(X \leqslant 1) = 0$.
   - Si $x < 1$, $0 \leqslant \mathbb{P}(X \leqslant x) \leqslant \mathbb{P}(X \leqslant 1) = 0$, donc $F_X(x) = 0$.
   - Si $x \geqslant 1$, $\mathbb{P}(X \leqslant x) = 1 - \mathbb{P}(X > x) = 1 - x^{-\alpha}$, donc $F_X(x) = 1 - x^{-\alpha}$.
2. La fonction F_X est continue et $\mathcal{C}^1$ par morceaux, donc X suit une loi à densité. En particulier, $f_X(x) = 0$ lorsque $x < 0$ et $f_X(x) = \frac{\alpha}{x^{\alpha+1}}$ lorsque $x > 0$. On peut fixer en tant que densité la fonction $f_X(x) = \alpha x^{-\alpha-1}\mathbb{1}_{[1,\infty[}(x)$. On note que $\int_{\mathbb{R}} f_X(x)\,dx = 1$.
3. X est une variable positive, donc elle admet une esperance. Pour vérifier qu'elle est finie, il suffit de calculer directement

$$\mathbb{E}[X] = \int_1^{\infty} \alpha x^{-\alpha}\,dx = \left[x^{-\alpha+1}\right]_1^{\infty}.$$

   Elle est finie lorsque $\alpha > 1$.

4. Par l'indépendance de X et Y, on sait que $f_{(X,Y)} = f_X f_Y$. Lorsque $t \geqslant 1$,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(XY > t) &= \mathbb{P}(XY > t, Y > 1)\\ &= \mathbb{P}(X > \frac{t}{Y}, Y > 1)\\ &= \int_{\{y>1, x>\frac{t}{y}\}} f_{(X,Y)}(x,y)\, d\lambda_2(x,y)\\ &= \int_{\{y>1, x>\frac{t}{y}\}} f_X(x) f_Y(y)\, d\lambda_2(x,y).\end{aligned}$$

Par le *théorème de Fubini-Tonelli*,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(XY > t) &= \int_1^\infty f_Y(y) \left(\int_{\frac{t}{y}}^\infty f_X(x)\, dx \right) dy\\ &= \int_1^\infty \mathbb{P}(X > \frac{t}{Y})\, d\mathbb{P}_Y(y).\end{aligned}$$

On rappelle que pour $\frac{t}{y} \geqslant 1$, $\mathbb{P}(X > \frac{t}{y}) = \left(\frac{t}{y}\right)^{-\alpha}$. Pour $\frac{t}{y} \leqslant 1$, on a $\mathbb{P}(X > \frac{t}{Y}) = 1$. Donc

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(XY > t) &= \int_1^t \mathbb{P}(X > \frac{t}{y}) \alpha y^{-\alpha-1}\, dy + \int_t^\infty \mathbb{P}(X > \frac{t}{y}) \alpha y^{-\alpha-1}\, dy\\ &= \alpha t^{-\alpha} \int_1^t y^{-1}\, dy + \int_t^\infty \alpha y^{-\alpha-1}\, dy\\ &= \alpha t^{-\alpha} \ln(t) t + t^{-\alpha}.\end{aligned}$$

Corrigé de l'exercice 7

- Soit $t < 0$. Alors $\mathbb{P}(X,Y) \leqslant t = 0$, car X et Y prennent que des valeurs positives.
- Soit $t \in [0,1]$. Alors, sachant que Y est une variable aléatoire absolument continue,

$$\mathbb{P}(XY \leqslant t) = \mathbb{P}(XY \leqslant t, Y \geqslant 0) = \mathbb{P}(XY \leqslant t, Y > 0) = \mathbb{P}(X \leqslant \frac{t}{Y}, Y > 0).$$

Comme X et Y sont indépendantes, $f_{(X,y)} = f_X f_Y$. Par le *théorème de Fubini-Tonelli*,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(XY \leqslant t) &= \int_0^\infty f_Y(y) \left(\int_0^{\frac{t}{y}} f_X(x)\, dx \right) dy\\ &= \int_0^1 \int_0^{\frac{t}{y}} 3x^2 \mathbb{1}_{[0,1]}\, dx dy.\end{aligned}$$

- Si $y \in]0,t]$, alors $\int_0^{\frac{t}{y}} 3x^2 \mathbb{1}_{[0,1]}\, dx = \int_0^1 3x^2\, dx = 1$, car $t/y \geqslant 1$.

— Si $y \in [t,1]$, alors $\int_0^{\frac{t}{y}} 3x^2 \mathbb{1}_{[0,1]}\, dx = \frac{t^3}{y^3}$.
Donc, par la *rélation de Chasles*,

$$\int_0^1 \int_0^{\frac{t}{y}} 3x^2 \mathbb{1}_{[0,1]}\, dxdy = \int_0^t dy + \int_t^1 \frac{t^3}{y^3}\, dy = t + t^3 \left[\frac{y^{-2}}{-2}\right]_t^1$$

et

$$\mathbb{P}(XY \leqslant t) = \frac{3}{2}t - \frac{1}{2}t^3$$

.

— Soit $t > 1$. Alors $\mathbb{P}(XY \leqslant t) = 1$, car X et Y sont à valeurs dans $[0,1]$.

Corrigé de l'exercice 8 Par la prorpiété d'indépendance de X et Y, on sait que $f_{(X,Y)} = f_X f_Y$. On denote $U = X+Y$ et $V = X - Y$.
Soit φ une fonction bornée continue arbitraire.

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\varphi(U,V)] &= \mathbb{E}[\varphi(X+Y, X-Y)] \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} \varphi(x+y, x-y) \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}\, dxdy \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} \varphi(x+y, x-y) \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{(x+y)^2+(x-y)^2}{4}}\, dxdy \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} \varphi(u,v) \frac{1}{4\pi} e^{-\frac{u^2+v^2}{4}}\, dudv\end{aligned}$$

par le changement de variables $\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\Phi(x,y) = (u,v)$, où $u = x+y$, $v = x-y$. Ici, $|J_\Phi| = 2$.
Donc $f_{(U,V)}(u,v) = \frac{1}{4\pi} e^{-\frac{x^2+y^2}{4}}$. Pour trouver la densité de la loi marginale U, il suffit d'intégrer $f_{(U,V)}$ par rapport à v :

$$f_U(u) = \int_{\mathbb{R}} f_{(U,V)}(u,v)\, dv = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} e^{-\frac{u^2}{4}}.$$

De même, $f_V(v) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} e^{-\frac{v^2}{4}}$. Donc $X \sim \mathcal{N}(0,2)$ et $Y \sim \mathcal{N}(0,2)$. En plus, pour tout $(u,v) \in \mathbb{R}^2$, $f_{(U,V)}(u,v) = f_U(u) f_V(v)$, et donc U et V sont indépendantes.

Corrigé de l'exercice 9

1. Si f est une densité, alors par le *théorème de Fubini-Tonelli*

$$\begin{aligned}1 &= \int_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\, dxdy \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} ce^{-x-y} \mathbb{1}_{\{0<x<y<+\infty\}}(x,y)\, dxdy \\ &= c\int_0^{\infty} e^{-y} \int_0^y e^{-x}\, dx\, dy \\ &= \frac{c}{2}.\end{aligned}$$

Donc $c = 2$.

2. La densité $f_{(X,Y)}$ ne peut pas s'écrire comme le produit d'une fonction en x et une fonction en y, donc X et Y ne sont pas indépendantes.
3. On cherche les dénsité de lois marginales

$$\begin{aligned}f_X(x) &= \int_{\mathbb{R}} 2e^{-x-y}\mathbb{1}_{\{0<x<y<+\infty\}}(x,y)\,dy \\ &= 2e^{-x}\mathbb{1}_{\mathbb{R}_+^*}(x)\int_x^{\infty} e^{-y}\,dy \\ &= 2e^{-2x}\mathbb{1}_{\mathbb{R}_+^*}(x).\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}f_Y(y) &= \int_{\mathbb{R}} 2e^{-x-y}\mathbb{1}_{\{0<x<y<+\infty\}}(x,y)\,dx \\ &= 2e^{-y}\mathbb{1}_{\mathbb{R}_+^*}(y)\int_0^{y} e^{-x}\,dx \\ &= 2e^{-y}(1-e^{-y})\mathbb{1}_{\mathbb{R}_+^*}(y).\end{aligned}$$

En particulier, les deux lois ne sont pas indépendantes, car $f_{(X,Y)} \not\equiv f_X f_Y$.
X suit la loi exponentielle de paramètre 2.
4. On applique le *théorème de Fubini-Tonelli* à

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(y > 2X) &= \int_{\mathbb{R}^2} 2e^{-x-y}\mathbb{1}_{\{0<x<2x<y<+\infty\}}(x,y)\,dxdy \\ &= 2\int_{\mathbb{R}} e^{-x}\int_{2x}^{\infty} e^{-y}\,dy\,dx \\ &= 2\int_{\mathbb{R}} e^{-3x}\,dx \\ &= \frac{2}{3}.\end{aligned}$$

Corrigé de l'exercice 10

1. Oui, X et Y sont indépendantes, car $f_{(X,Y)}$ peut s'écrire comme produit d'une fonction de x et d'une fonction de y. En particulier, $X \sim \exp(1)$ et $Y \sim \exp(1)$.
2. Soient $U = X + Y$ et $V = X/Y$. On note que U et V sont des variables positives. Soit φ une fonction continue et bornée,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\varphi(U,V)] &= \mathbb{E}[\varphi(X+Y, X/Y)] \\ &= \int_{(\mathbb{R}_+^*)^2} \varphi(x+y, \frac{x}{y})e^{-(x+y)}\,dxdy\end{aligned}$$

On utilise le changement des variables $\Phi : (\mathbb{R}_+^*)^2 \to (\mathbb{R}_+^*)^2$, $\Phi(x,y) = (u,v)$ où $u = x+y$ et $v = x/y$. La valeur absolue de son jacobien est $|J_\Phi| = \frac{x+y}{y^2}$ et son inverse est $\Phi(u,v) = \left(\frac{uv}{1+v}, \frac{u}{1+v}\right)$. Il s'agit bien d'un $\mathcal{C}^1$ difféomorphisme. Par le *théorème de changement des variables*,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\varphi(U,V)] &= \mathbb{E}[\varphi(X+Y, X/Y)] \\ &= \int_{(\mathbb{R}_+^*)^2} \varphi(x+y, \frac{x}{y}) e^{-(x+y)} \frac{y^2}{x+y} \frac{x+y}{y^2}\, dxdy \\ &= \int_{(\mathbb{R}_+^*)^2} \varphi(u,v) e^{-u} \frac{u}{(1+v)^2}\, dudv\end{aligned}$$

Donc par la méthode des fonctions test, on conclut que

$$f_{(U,V)}(u,v) = \mathbb{1}_{(\mathbb{R}_+^*)^2}(u,v) e^{-u} \frac{u}{(1+v)^2}.$$

3.

$$f_U(u) = ue^{-u} \int_0^\infty \frac{1}{(1+v)^2}\, dv = ue^{-u}.$$

$$f_V(v) = \frac{1}{(1+v)^2} \int_0^\infty ue^{-u}\, du = \frac{1}{(1+v)^2}$$

4.

$$\mathbb{E}[U] = \int_0^\infty u^2 e^{-u}\, du = \Gamma(3) = 2! = 2.$$

$$\mathbb{E}[U^2] = \int_+^\infty u^3 e^{-u}\, du = \Gamma(4) = 3! = 6.$$

Par contre, $\mathbb{E}[|V|] = \int_0^\infty \frac{v}{(1+v)^3}\, dv$ n'est pas finie (par *critère de Riemann)* et donc V n'admet pas des moments.

Corrigé de l'exercice 11 1. On suppose que X et Y suivent des lois gaussiennes au sens large : soit des lois gaussiennes classiques, soit des lois presque sûrement constantes. Dans les deux cas, les fonctions caractéristiques sont de la forme $e^{i\xi\mu - \frac{\xi^2\sigma^2}{2}}$. On regarde la fonction caractéristique de la variable aléatoire $aX + bY$:

$$\Phi_{aX+bY}(\xi) = \Phi_{aX}(\xi)\Phi_{bY}(\xi) = \Phi_X(a\xi)\Phi(b\xi) = e^{i(a\mu_1+b\mu_2)\xi - \frac{(\sigma_1^2a^2+\sigma_2^2b^2)\xi^2}{2}}$$

et donc soit $aX+bY = \mathcal{N}(a\mu_1+b\mu_2, \sigma_1^2a^2+\sigma_2^2b^2)$ (si la variation est non-nulle) soit $aX+bY$ est presque sûrement égale à la constante $a\mu_1+b\mu_2$.

2. (a) En prennant $b=0$, puis $a=0$, alors on obtient par définition que X et Y suivent des lois gaussiennes ou p.s. constantes.

(b) Soit $\xi \in \mathbb{R}^2$. On note $\xi = (\xi_1, \xi_2)$. La fonction caractéristique de (X, Y) est

$$\begin{aligned}
\Phi_{(X,Y)}(\xi) &= \mathbb{E}\big[e^{i(\xi_1,\xi_2)\cdot(X,Y)}\big] \\
&= \mathbb{E}\big[e^{i(\xi_1 X+\xi_2 Y)}\big] \\
&= \Phi_{\xi_1 X+\xi_2 Y}(1).
\end{aligned}$$

On rapelle que $\xi_1 X + \xi_2 Y$ est une loi gaussiènne ou p.s. constantes. Sachant que

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[\xi_1 X + \xi_2 Y] &= \xi_1 \mathbb{E}[X] + \xi_2 \mathbb{E}[Y] \\
Var(\xi_1 X + \xi_2 Y) &= \xi_1^2 Var(X) + \xi_2^2 Var(Y) - 2\xi_1\xi_2 Cov(X, Y)
\end{aligned}$$

alors

$$\Phi_{(X,Y)}(\xi) = e^{i(\xi_1\mathbb{E}[X]+\xi_2\mathbb{E}[Y])-\frac{\xi_1^2 Var(X)+\xi_2^2 Var(Y)-2\xi_1\xi_2 Cov(X,Y)}{2}}.$$

(c) L'implication directe est toujours vraie.
Lorsque $Cov(X, Y) = 0$, alors par (b), $\Phi_{(X,Y)} = \Phi_X \Phi_Y$ et donc X et Y sont indépendantes.

3. La variable aléatoire Y la loi $\mathcal{N}(0, 1)$: pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
F_Y(t) &= \mathbb{P}(Y \leqslant t) \\
&= \mathbb{P}(X \leqslant t, B = 1) + \mathbb{P}(X \geqslant -t, B = -1) \\
&= \mathbb{P}(X \leqslant t)\mathbb{P}(B = 1) + \mathbb{P}(X \geqslant -t)\mathbb{P}(B = -1) \\
&= \frac{1}{2}F_X(t) + \frac{1}{2}(1 - F_X(-t)) \\
&= F_X(t)
\end{aligned}$$

par la parité de f_X.
Les lois X et Y ne sont pas indépendantes : $P(X \in [0, 1], Y \in [3, 4]) = 0$, tant que $\mathbb{P}(X \in [0, 1]) \neq 0$ et $\mathbb{P}(Y \in [3, 4]) \neq 0$.
Par contre, sachant que X et B sont indépendantes, on trouve

$$Cov(X, Y) = \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y] = \mathbb{E}[X^2 B] = \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[B] = 0,$$

où à la fin on a utilisé le fait que $\mathbb{E}[B] = 0$.