CONTRÔLE CONTINU 1 - SÉMINAIRE CATÉGORIES

NOM, Prénom :	Note :

La durée du contrôle est de **40** *minutes. Les documents et appareils électroniques ne sont pas autorisés.*

Exercice 1.

◇ Représenter graphiquement la catégorie $\mathscr{C}at_{\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}}$ associée au groupe abélien $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}, +, 0)$.

◇ Représenter graphiquement la catégorie $\mathscr{C}at_{\{0,1\}}$ associée à l'ensemble partiellement ordonné $(\{0,1\}, \leqslant)$.

◇ Représenter graphiquement la catégorie produit $\mathscr{C}at_{\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}} \times \mathscr{C}at_{\{0,1\}}$.

Exercice 2.

◇ Est-ce que les données suivantes forment une catégorie ? Si oui, le démontrer, sinon, le justifier.
Objets : un seul $\bullet$.
Flèches : tous les ensembles X, Y, Z, etc.
Compositions : la composée "$Y \circ X$" est donnée par la différence $Y \backslash X$.
Unités : l'ensemble vide $\varnothing$.

◇ Est-ce que les données suivantes forment une catégorie ? Si oui, le démontrer, sinon, le justifier.
OBJETS : un seul $\bullet$.
FLÈCHES : tous les ensembles X, Y, Z, etc.
COMPOSITIONS : la composée "$Y \circ X$" avec Y est donnée par l'union $X \cup Y$.
UNITÉS : l'ensemble vide $\varnothing$.

◇ Est-ce que cette catégorie est petite ? Est-ce que cette catégorie est localement petite ?

Exercice 3.

◇ On considère la sous-catégorie $\mathscr{E}ns_{inj}$ de la catégorie $\mathscr{E}ns$ des ensembles dont les flèches sont les applications injectives. S'il y en a, quels sont ses objets initiaux (soleils) et terminaux (puits) ?

◇ On considère aussi la sous-catégorie $\mathscr{E}ns_{surj}$ de la catégorie $\mathscr{E}ns$ dont les flèches sont les applications surjectives. Décrire la sous-catégorie $\langle \mathscr{E}ns_{inj}, \mathscr{E}ns_{surj} \rangle$ de $\mathscr{E}ns$ engendrée par $\mathscr{E}ns_{inj}$ et $\mathscr{E}ns_{surj}$.