DL 4 : ANALYSE — 13 avril 2023

CONTRÔLE CONTINU 2

NOM, PRÉNOM : VALLETTE Bruno	NOTE : $\frac{10}{10}$

La durée du contrôle est de **30** *minutes. Les documents, calculatrices, téléphones et appareils électroniques ne sont pas autorisés.*

Question 1. On considère une application $f : U \subset E \to F$ entre espaces vectoriels normés, un élément $a \in U$ et un élément $v \in E$. Donner la définition de la *dérivée de f en a dans la direction v* (quand elle existe).

$$\boxed{\lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\left(f(a+tv) - f(a)\right)}$$

Question 2. Soient deux applications $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ et $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ et soit $a \in \mathbb{R}^2$. Déterminer si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses ?

- L'application f est différentiable en a donc toutes ses dérivées partielles en a existent. VRAI/~~FAUX~~
- L'application f admet en a des dérivées dans toutes les directions donc elle est différentiable en a. ~~VRAI~~/FAUX
- Si f et g sont différentiables, on a $\mathrm{D}_a(g\circ f) = \mathrm{D}_a g \circ \mathrm{D}_a f$. ~~VRAI~~/FAUX
- Si g est de classe $\mathscr{C}^3$ alors $\frac{\partial^3 g}{\partial x \partial y \partial z} = \frac{\partial^3 g}{\partial z \partial y \partial x}$. VRAI/~~FAUX~~

Question 3. On considère l'application $f : \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ définie par $f(M) := M^3$. Montrer qu'elle est différentiable sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et donner sa différentielle.

Pour toute paire $M, H \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ de matrices, on a

$$f(M+H) = (M+H)^3 = M^3 + HM^2 + MHM + M^2H + H^2M + HMH + MH^2 + H^3 .$$

Pour toute matrice $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, l'application $\varphi : H \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto HM^2 + MHM + M^2H \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est linéaire et continue (espaces vectoriels de dimension finie). En utilisant la norme d'algèbre $\|A\| := \sqrt{\mathrm{tr}({}^tAA)}$, on a

$$\frac{1}{\|H\|}\left\|H^2M + HMH + MH^2 + H^3\right\| \leqslant \frac{1}{\|H\|}\left(\|H\|^2\|M\| + \|H\|\|M\|\|H\| + \|M\|\|H\|^2 + \|H\|^3\right) = 3\|H\|\|M\| + \|H\|^2 .$$

En posant l'application

$$\varepsilon(H) := \frac{1}{\|H\|}\left(H^2M + HMH + MH^2 + H^3\right) ,$$

on a

$$f(M+H) = f(M) + \varphi(H) + \|H\|\varepsilon(H)$$

avec $\varepsilon(H)$ tend vers 0 quand $\|H\|$ tend vers 0. Ceci montre que l'application f est différentiable sur tout $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et que sa différentielle en $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est l'application linéaire

$$\boxed{\mathrm{D}_M f(H) = HM^2 + MHM + M^2H .}$$

Question 4. On considère l'application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(x,y) := (x^2\cos y, 3^{xy})$.

(1) Calculer la matrice jacobienne $\mathrm{J}_{(x,y)}f$ de f .

$$\boxed{\mathrm{J}_{(a,b)}f = \begin{pmatrix} 2x\cos y & -x^2\sin y \\ 3^{xy}y\ln 3 & 3^{xy}x\ln 3 \end{pmatrix}}$$

(2) Soit $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une application de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$. Calculer les dérivées partielles de $g \circ f$ de deux manières : d'abord directement puis avec la question précédente.

Le calcul direct donne

$$\frac{\partial (g \circ f)}{\partial x}(x, y) = 2x \cos y \frac{\partial g}{\partial x}\left(x^2 \cos y, 3^{xy}\right) + 3^{xy} y \ln 3 \frac{\partial g}{\partial y}\left(x^2 \cos y, 3^{xy}\right) \quad \text{et}$$
$$\frac{\partial (g \circ f)}{\partial y}(x, y) = -x^2 \sin y \frac{\partial g}{\partial x}\left(x^2 \cos y, 3^{xy}\right) + 3^{xy} x \ln 3 \frac{\partial g}{\partial y}\left(x^2 \cos y, 3^{xy}\right) \ .$$

On peut aussi obtenir ce calcul en multipliant le matrices jacobienne de f et de g.

$$\mathrm{J}_{(x,y)}(g \circ f) = \mathrm{J}_{(x^2 \cos y, 3^{xy})} g \times \mathrm{J}_{(x,y)} f = \begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial x}\left(x^2 \cos y, 3^{xy}\right) & \frac{\partial g}{\partial y}\left(x^2 \cos y, 3^{xy}\right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2x \cos y & -x^2 \sin y \\ 3^{xy} y \ln 3 & 3^{xy} x \ln 3 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 2x \cos y \frac{\partial g}{\partial x}\left(x^2 \cos y, 3^{xy}\right) + 3^{xy} y \ln 3 \frac{\partial g}{\partial y}\left(x^2 \cos y, 3^{xy}\right) & -x^2 \sin y \frac{\partial g}{\partial x}\left(x^2 \cos y, 3^{xy}\right) + 3^{xy} x \ln 3 \frac{\partial g}{\partial y}\left(x^2 \cos y, 3^{xy}\right) \ . \end{pmatrix}$$
