

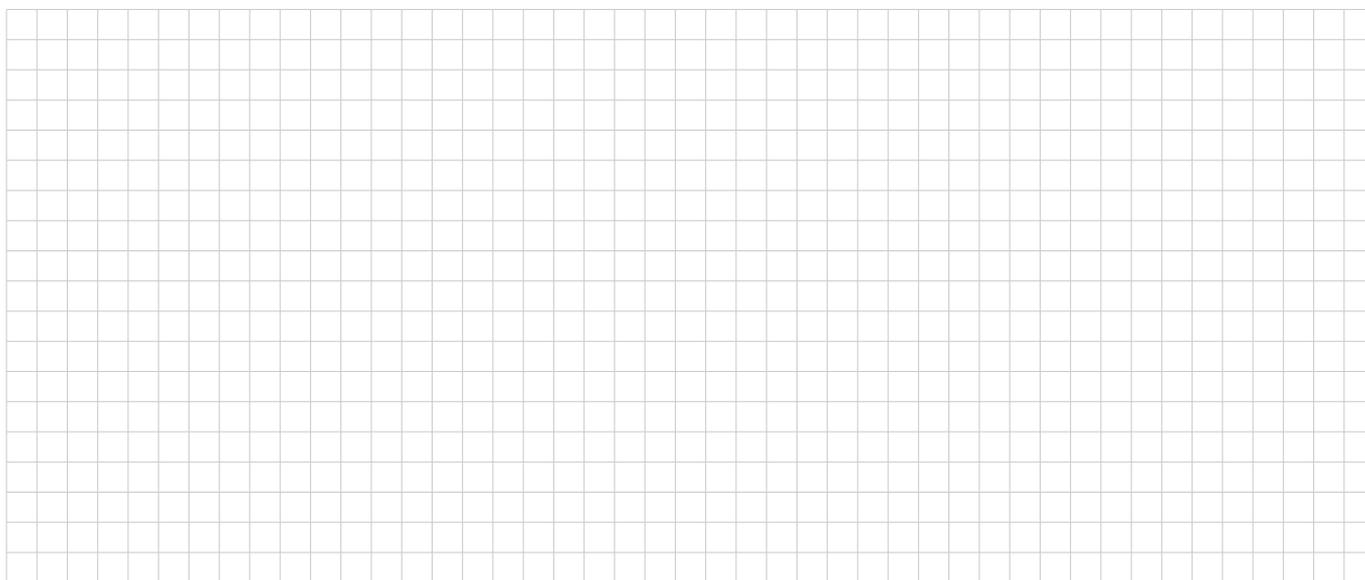
## CONTRÔLE CONTINU 2 - SÉMINAIRE CATÉGORIES

NOM, Prénom :	Note :
---------------	--------

*La durée du contrôle est de 40 minutes. Les documents, calculatrices, téléphones et appareils électroniques ne sont pas autorisés.*

**Question 1.** On considère le foncteur «oubli»  $O: \mathcal{Ab} \rightarrow \mathcal{Grp}$  de la catégorie des groupes abéliens vers celle des groupes qui associe le groupe sous-jacent à un groupe abélien.

(1) Est-ce que ce foncteur est fidèle et plein ?



(2) Est-ce que ce foncteur est une équivalence de catégories ?



**Question 2.** Soit  $\mathcal{C}$  une catégorie localement petite. À toute paire d'objets  $X, Y$  de  $\mathcal{C}$ , on associe le foncteur

$$F_{X,Y}: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{E}ns, A \mapsto \mathcal{C}(X, A) \times \mathcal{C}(Y, A).$$

(1) Est-ce que le foncteur  $F_{X,Y}$  est représentable et, si oui, par quel objet (s'il existe) ?



(2) On considère le cas où la catégorie  $\mathcal{C} = \mathcal{V}ect_{\mathbb{R}}$  est celle des espaces vectoriels réels. Décrire l'espace vectoriel qui représente le foncteur  $F_{X,Y}$  associé à deux espaces vectoriels  $X$  et  $Y$ .



(3) On considère les espaces vectoriels  $X = \mathbb{R}^2$  et  $Y = \mathbb{R}$ . Décrire en termes de matrices l'ensemble  $\text{Nat}(F_{\mathbb{R}^2, \mathbb{R}}, F_{\mathbb{R}^2, \mathbb{R}})$  des transformations naturelles de  $F_{\mathbb{R}^2, \mathbb{R}}$  vers lui-même.

